

# Algoritmos evolutivos para optimización con múltiples objetivos



***Dr. Christian D. von Lücken Martínez***

***Facultad Politécnica - Universidad Nacional de Asunción***

# Introducción: Problema de optimización multi-objetivo (Minimización)

## Definición: Problema de optimización multi-objetivo (Minimización)

Sean  $m$  funciones objetivo  $\{f_1, \dots, f_m\}$ ,  $f_i : \mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$ , un MOP se define como:

$$\text{Minimizar} \quad \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \quad (1)$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in \mathcal{Y} \subseteq \mathbb{R}^m$$

sujeto a

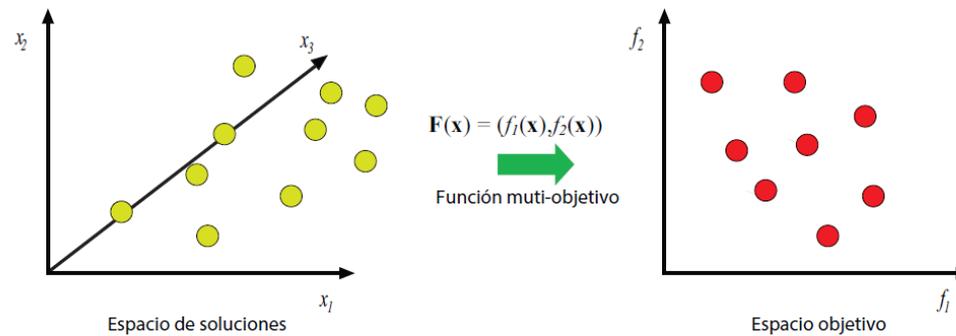
$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), \dots, g_c(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0} \quad (2)$$

$$x_i^{(L)} \leq x_i \leq x_i^{(U)} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (3)$$

Las restricciones 3 representan los  $2n$  límites de las variables.

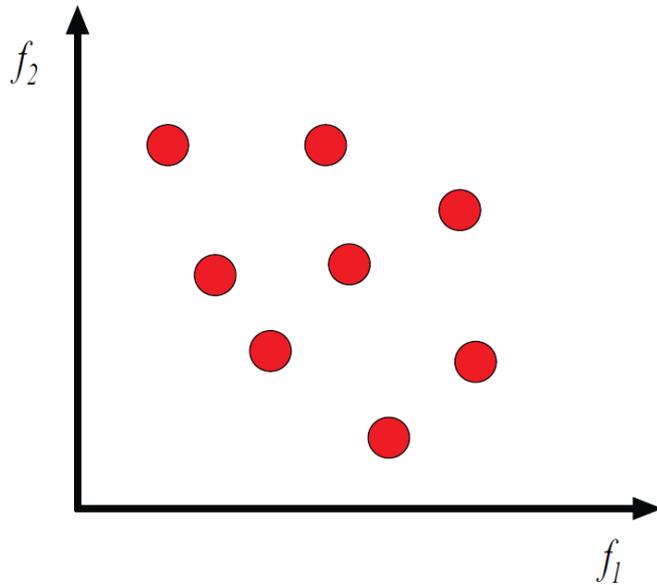
El vector de restricciones  $\mathbf{g}$  delimita la forma de la región de factibilidad.

# Introducción: Problema de optimización multi-objetivo (Minimización)

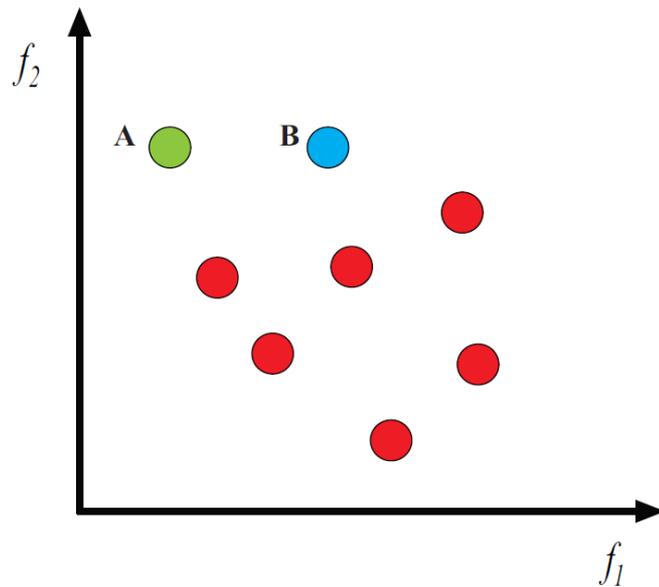


- Optimización de varios objetivos contradictorios a la vez
- Conjunto de soluciones compromiso no una solución única

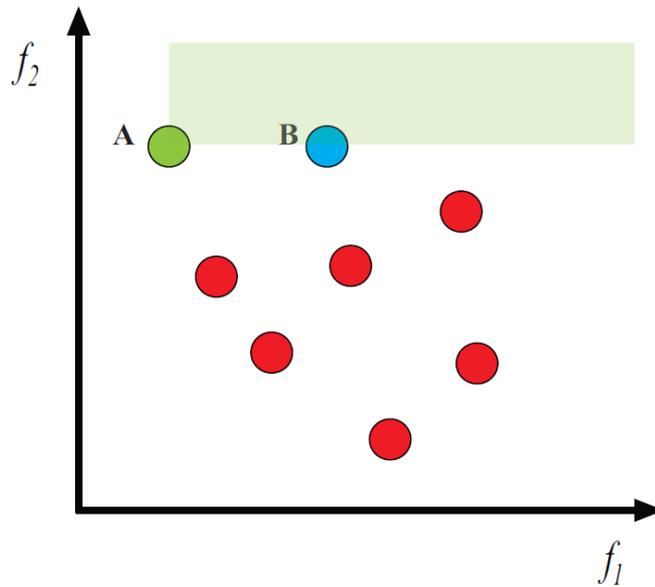
# Relación de dominancia: problema de minimización



# Relación de dominancia: problema de minimización



# Relación de dominancia: problema de minimización



**A** es mejor o igual que **B**  
en todos los objetivos y  
es mejor en al menos uno

# Relación de dominancia: problema de minimización

Definición: Relación de dominancia Pareto

La relación de dominancia Pareto se define como:

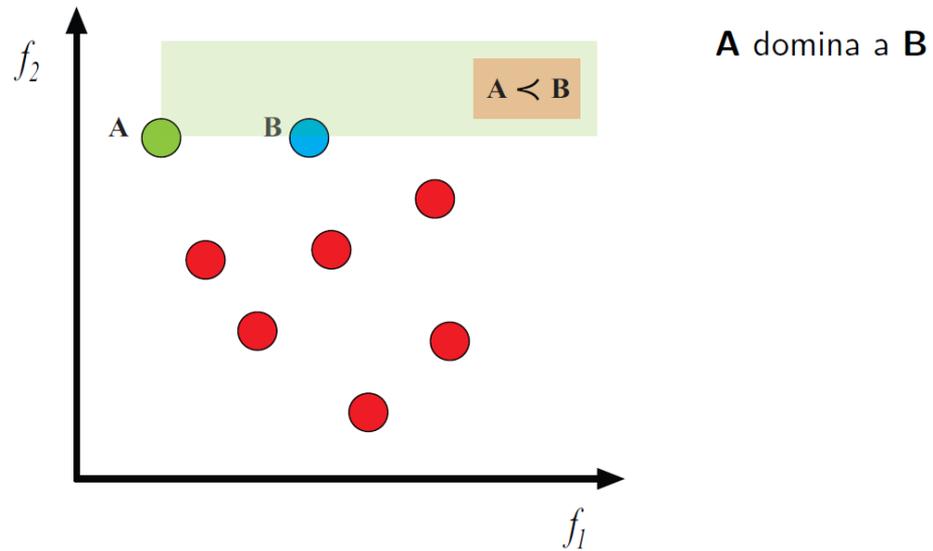
$$\prec = \{(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \mid \forall y_i, y_i \leq y'_i \wedge \exists y_j, y_j < y'_j\} \quad (4)$$

Si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \in \prec$ , **y domina a y'**, denotado por  $\mathbf{y} \prec \mathbf{y}'$ .

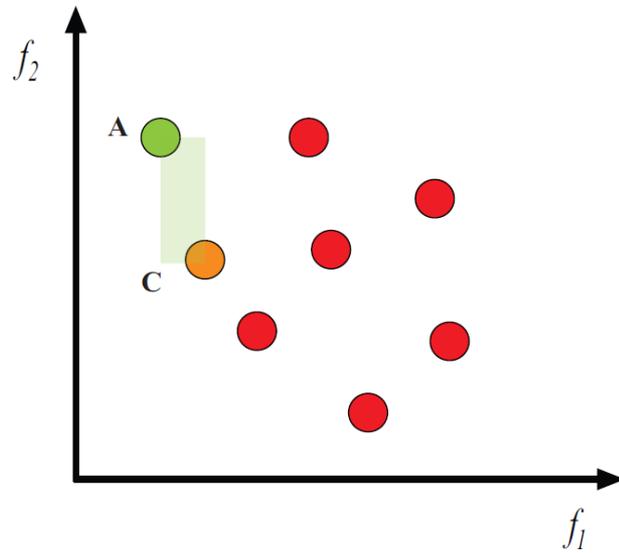
Si  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \notin \prec$ , **y' es no-dominado por y**, denotado por  $\mathbf{y} \not\prec \mathbf{y}'$ .

Si  $\mathbf{y} \not\prec \mathbf{y}'$  y  $\mathbf{y}' \not\prec \mathbf{y}$ , **y' no es comparable a y**

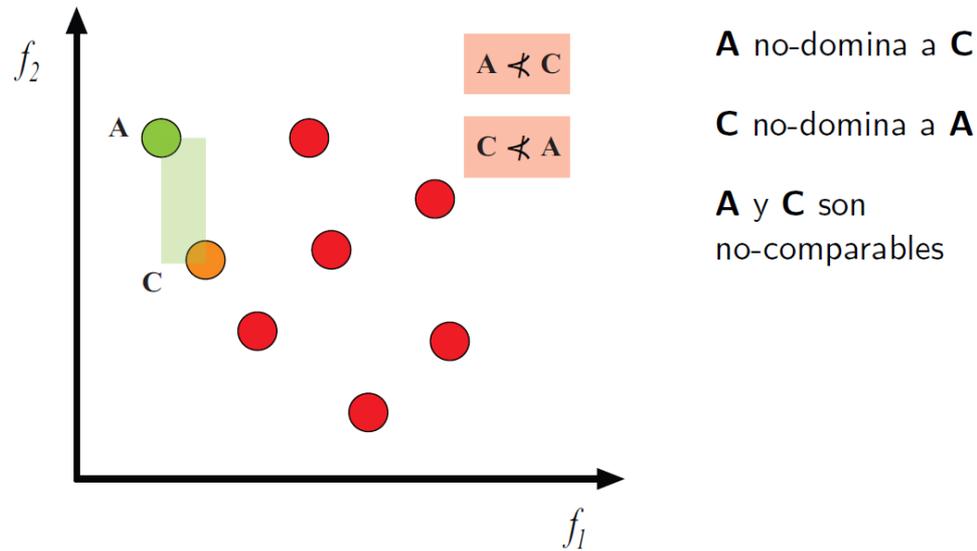
# Soluciones no-comparables: problema de minimización



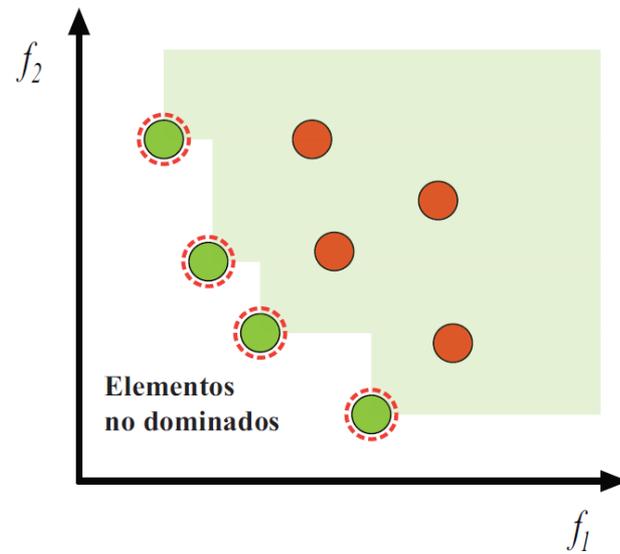
# Soluciones no-comparables: problema de minimización



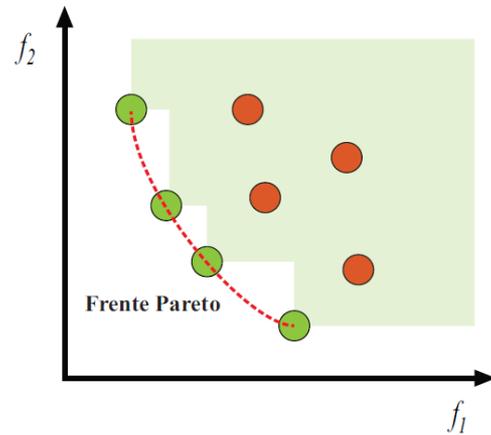
# Soluciones no-comparables: problema de minimización



# Frente Pareto Óptimo



# Frente Pareto Óptimo



**Definición: Frente Pareto Óptimo**

*Para un MOP dado, el Frente Pareto se define como:*

$$\mathcal{PF}^* = \{ \mathbf{y} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mid \nexists \mathbf{x}' \in \mathcal{X}_f \text{ tal que } \mathbf{F}(\mathbf{x}') \prec \mathbf{F}(\mathbf{x}) \}$$

# Multiobjective Evolutionary Algorithms MOEAs

## MOEAs de primera generación

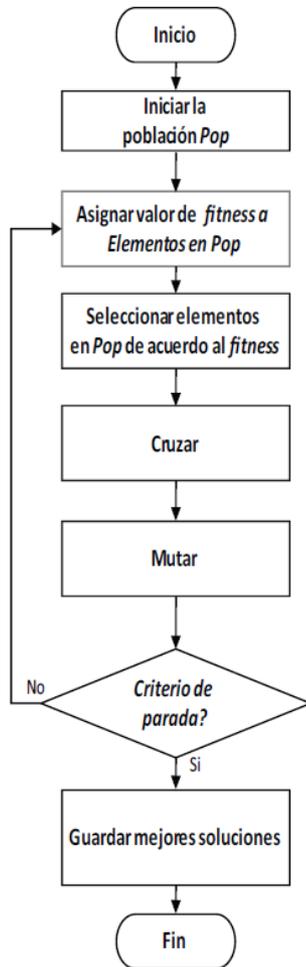
1. Nondominated Sorting Genetic Algorithm - NSGA
2. Niche Pareto Genetic Algorithm - NPGA
3. Fonseca-Fleming Genetic Algorithm - FFGA

## MOEAs de segunda generación (elitistas)

1. Strength Pareto Evolutionary Algorithm - SPEA
2. Nondominated Sorting Genetic Algorithm II - NSGA-II
3. Controlled Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm II - CNSGA-II

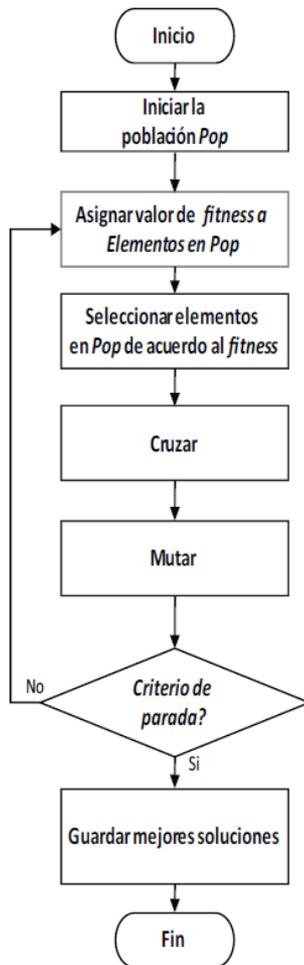
# Multiobjective Evolutionary Algorithms

## MOEAs



# Multiobjective Evolutionary Algorithms

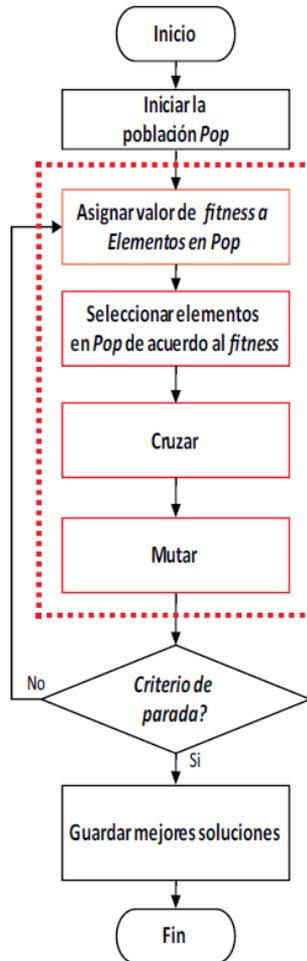
## MOEAs



Trabajan con un conjunto de individuos

# Multiobjective Evolutionary Algorithms

## MOEAs



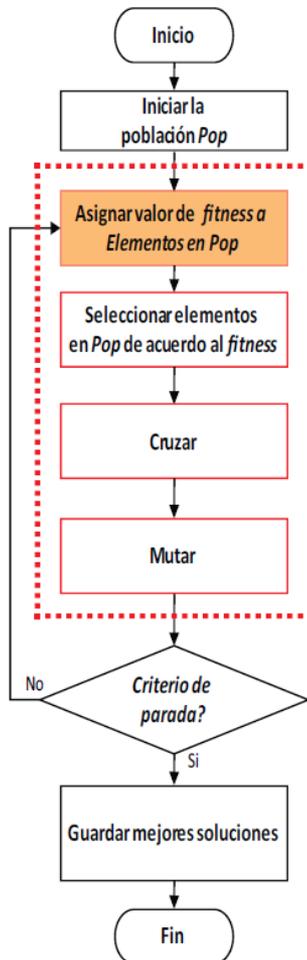
Trabajan con un conjunto de individuos

Inspirados en la evolución natural:

- Asignación de *fitness*
- Selección
- Cruzamiento
- Mutación

# Multiobjective Evolutionary Algorithms

## MOEAs



Trabajan con un conjunto de soluciones

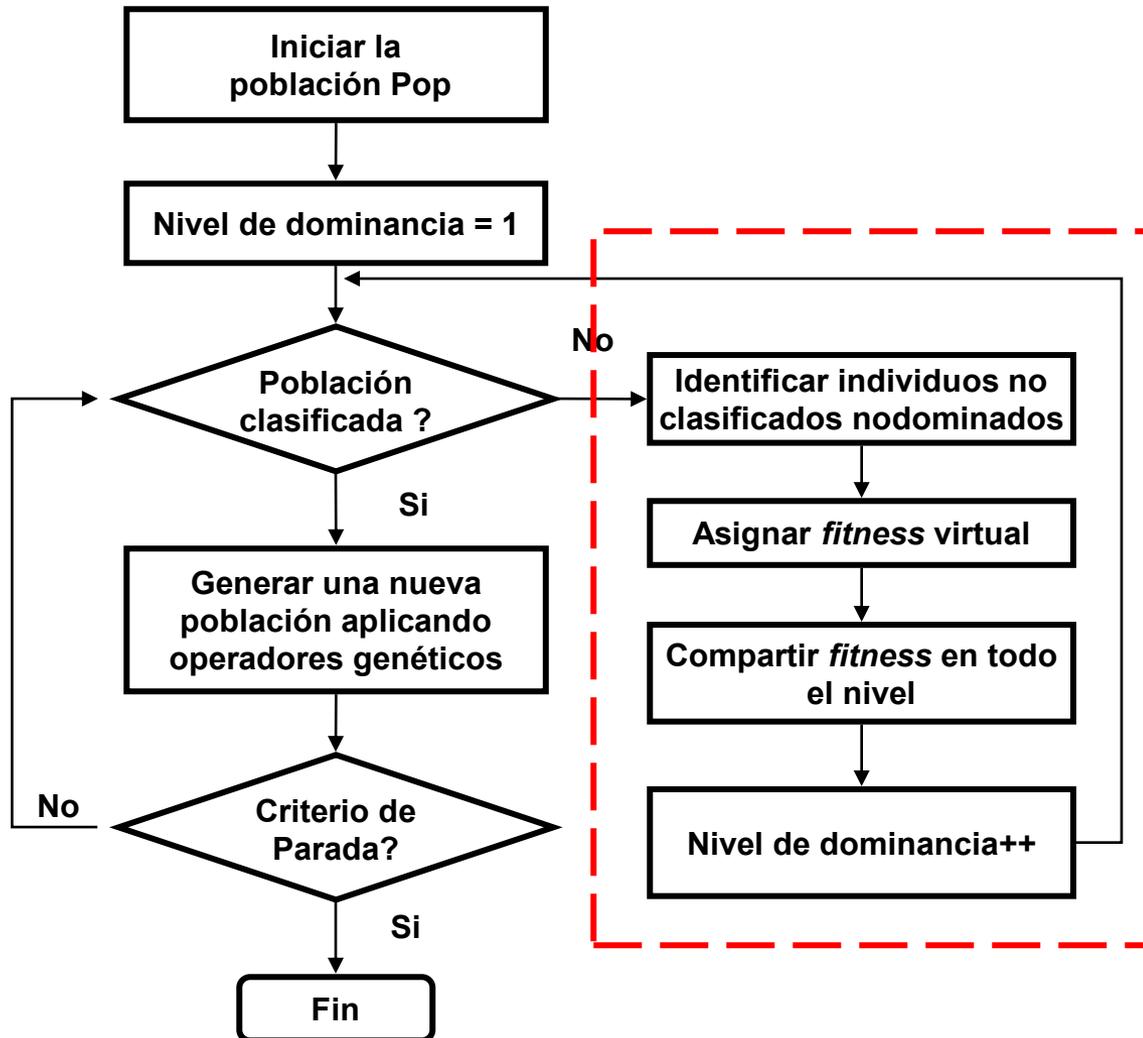
Inspirados en la evolución natural:

- Asignación de *fitness*
- Selección
- Cruzamiento
- Mutación

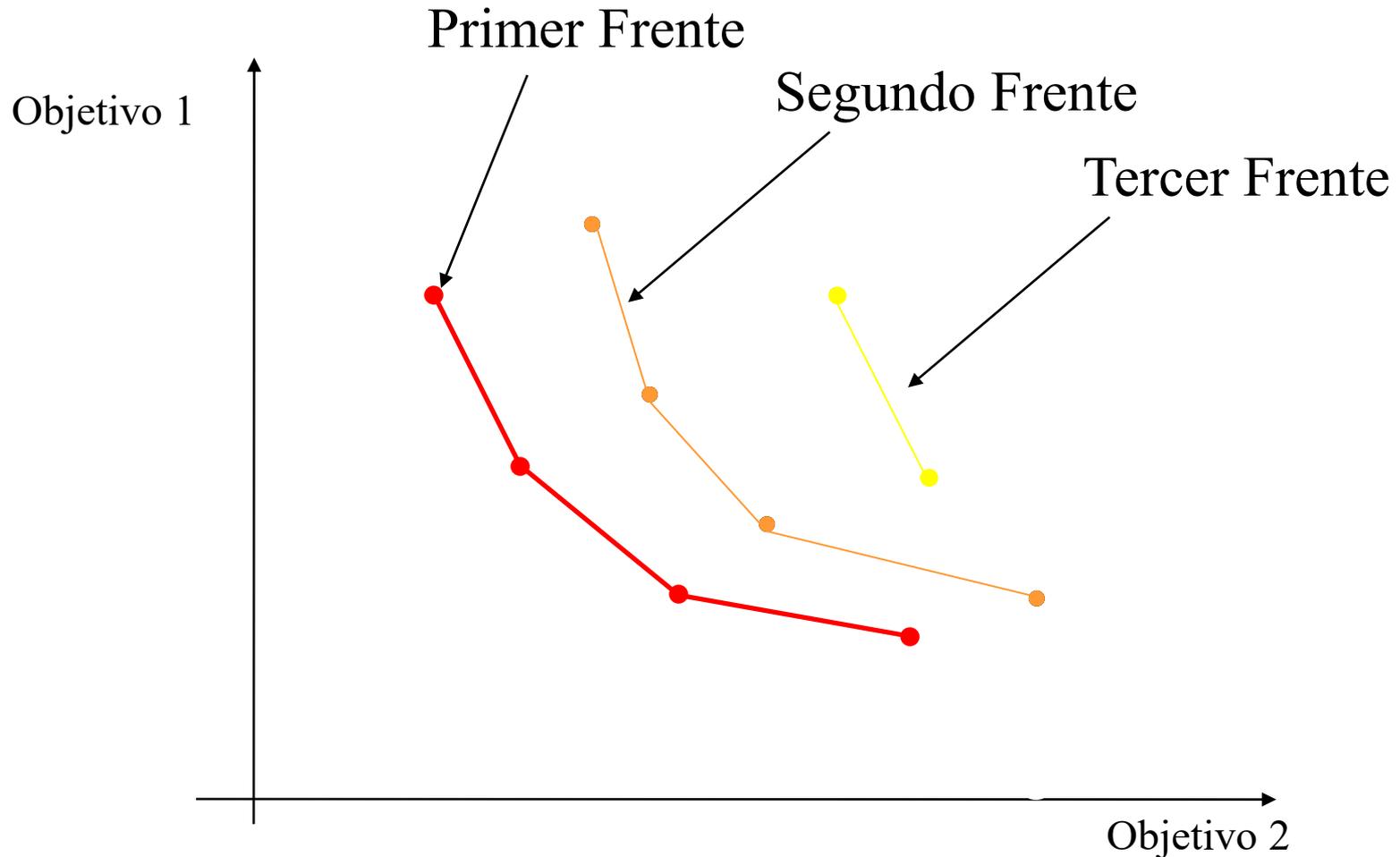
Diferencia fundamental: asignación de *fitness*

La mayoría utiliza la relación de dominancia como base

# Diagrama de flujo del NSGA



# Clasificación por no dominancia



# Multiobjective Evolutionary Algorithms MOEAs

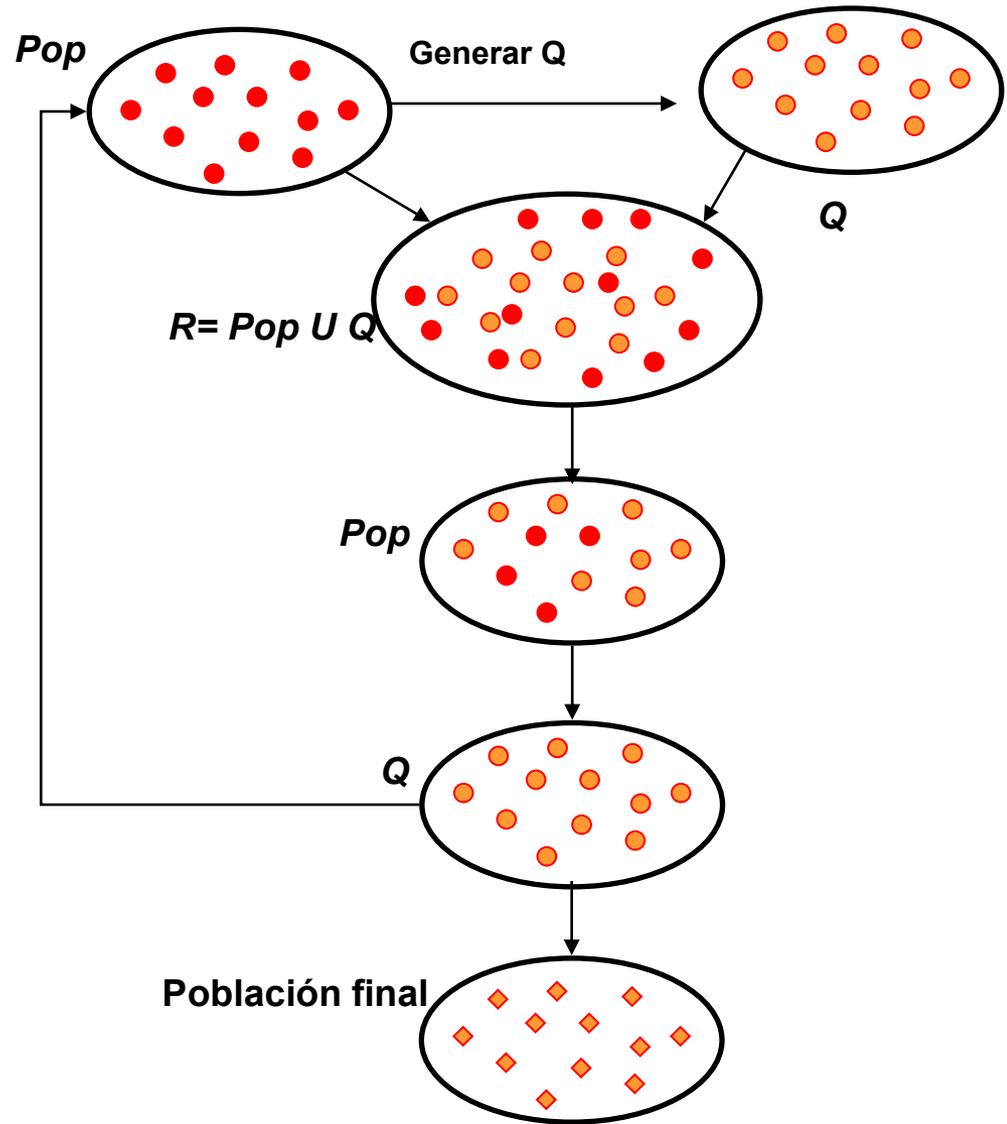
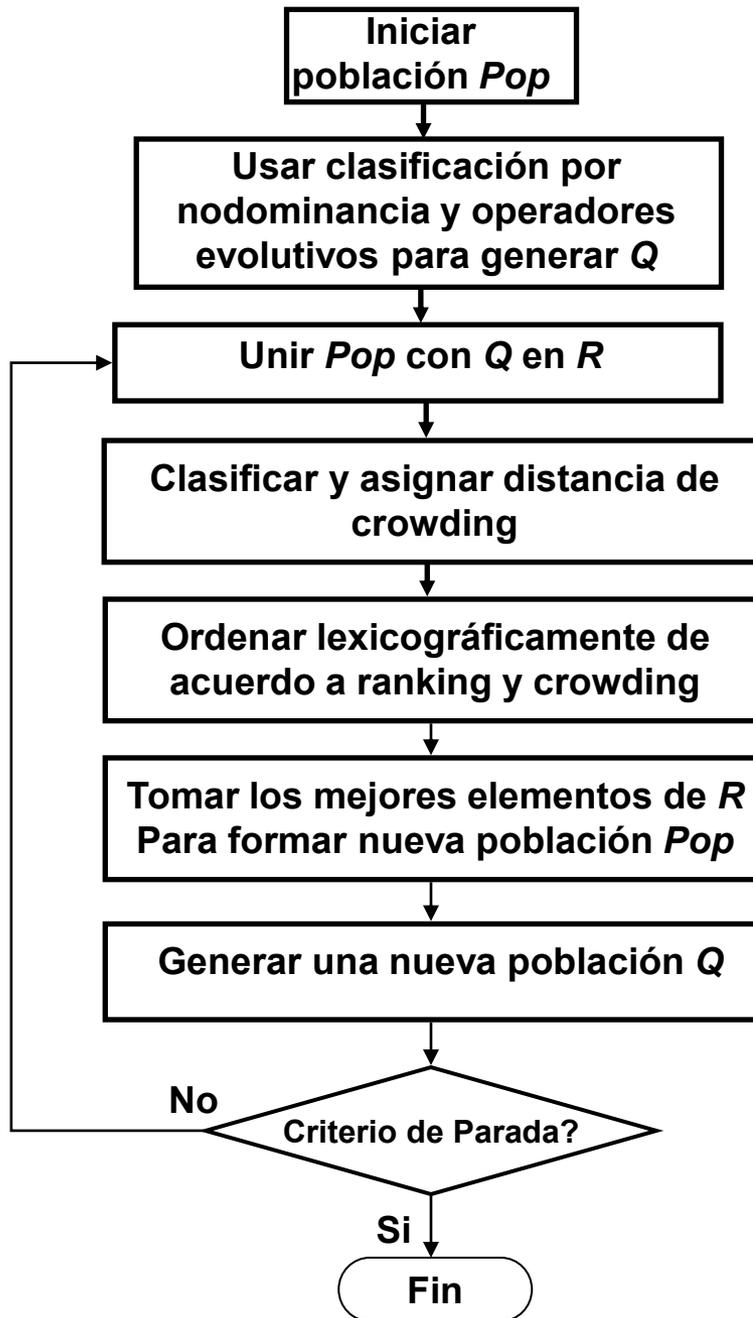
## MOEAs de primera generación

1. Nondominated Sorting Genetic Algorithm - NSGA
2. Niche Pareto Genetic Algorithm - NPGA
3. Fonseca-Fleming Genetic Algorithm - FFGA

## MOEAs de segunda generación (elitistas)

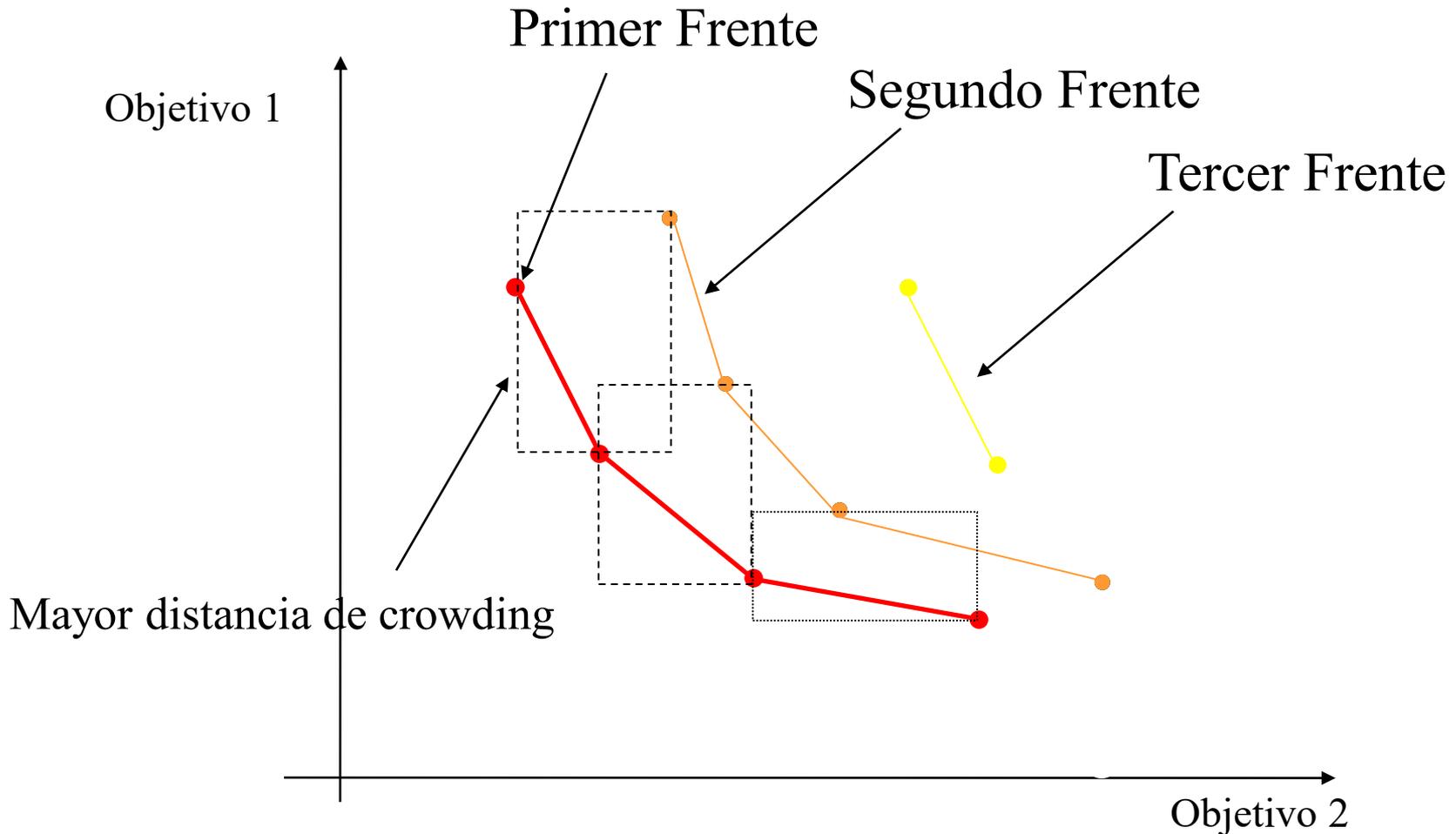
1. Strength Pareto Evolutionary Algorithm - SPEA
2. Nondominated Sorting Genetic Algorithm II - NSGA-II
3. Controlled Elitist Nondominated Sorting Genetic Algorithm II - CNSGA-II

# NSGA-II



Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. A. M. T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *IEEE transactions on evolutionary computation*, 6(2), 182-197.

# ***Distancia de Crowding***



# Un ejemplo

## Uso de MOEAs para el problema de Selección de Cultivos

Brunelli, R., & von Lüken, C. (2009). Optimal crops selection using multiobjective evolutionary algorithms. *AI Magazine*, 30(2), 96-96.

# Selección de Cultivos



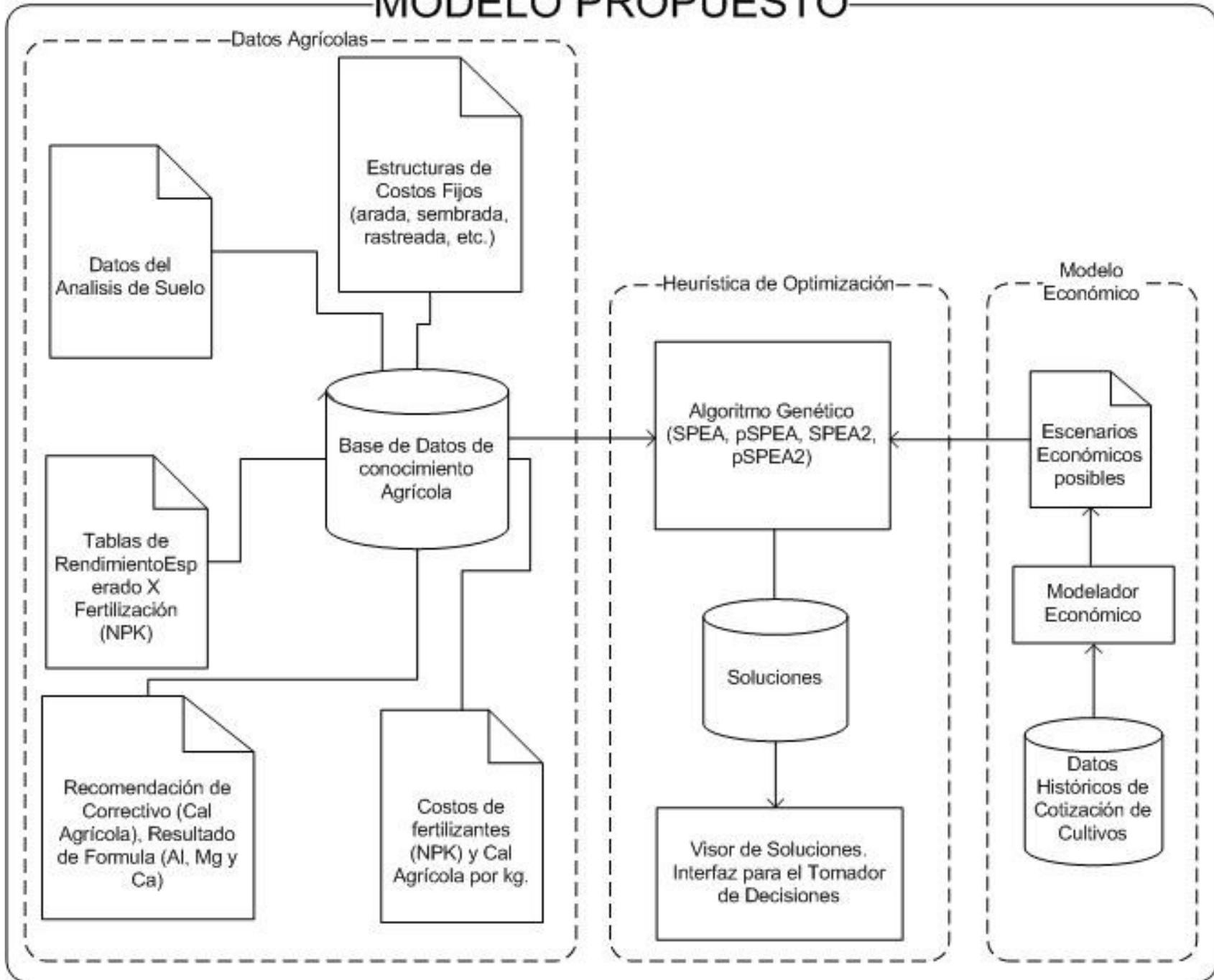
# Selección de Cultivos

- ¿Cuál es la mejor combinación de cultivos a sembrar en una unidad específica de área, teniendo en cuenta:
  - Características del suelo (Análisis de Suelo)
  - Costos fijos relacionados con cada tipo de cultivo
  - Ganancia esperada por tipo de cultivo
  - Costos relacionados a la fertilización del suelo
  - Uso de correctivos del nivel de pH del suelo
  - Riesgos Económicos

# Selección de Cultivos

- 6 Cultivos: maíz, soja, trigo, girasol, caña de azúcar, tartago
- Matriz:  $7 \times 7 = 49$  parcelas
- Total:  $6^{49}$  posibilidades  
=1,734344052326674276e+38

# MODELO PROPUESTO



# Representación

1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

- 0: Soja  
1: Trigo  
2: Maiz  
3: Girasol  
4: Caña de Azucar  
5: NoCultivar

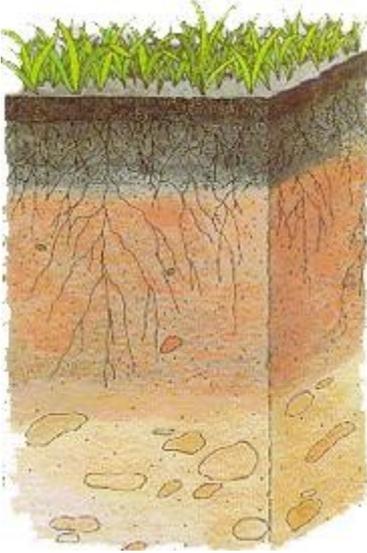
↑  
Cromosoma

Gen {ID Cultivo, (x,y)}

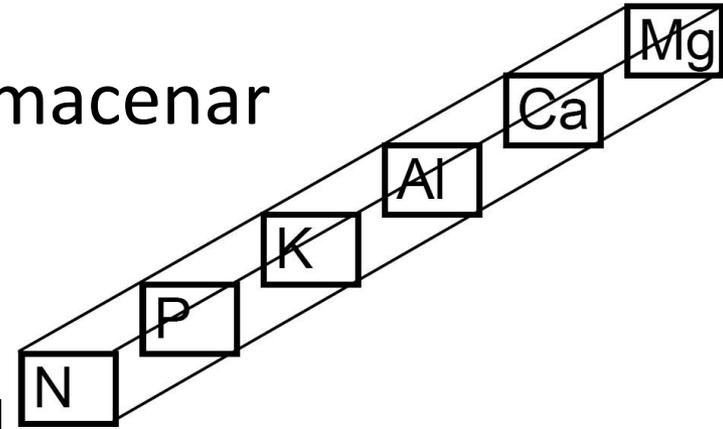
# Evaluación: partes

1. Costo de Fertilizantes
2. Costo de Correctivos (Cal Agrícola)
3. Simulador de Escenarios Económicos
  - Ganancia Bruta
  - Riesgo

# Evaluación: Suelo



Estructura para almacenar las características del suelo



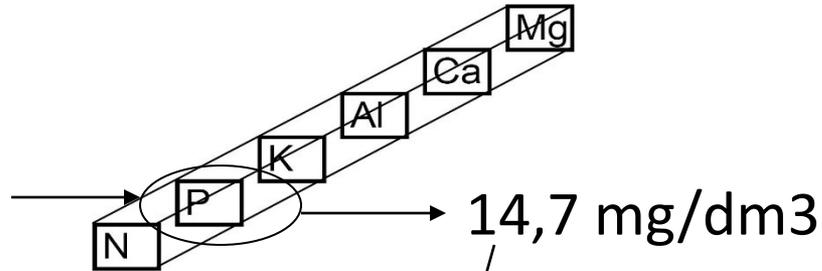
1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

## Componentes Químicos:

- Nitrógeno (N)
- Fósforo (P)
- Potasio (K)
- Aluminio (Al)
- Calcio (Ca)
- Magnesio (Mg)

# Evaluación: Costo Fertilización

Para cada posición en  
Matriz de componentes  
Químicos: Hacer



Rendimiento Esperado en Kg/Ha	Nivel actual de Fosforo (P) en el suelo en mg/dm <sup>3</sup>			
	0 - 7	8 - 16	17 - 41	> 42
	Recomendación de Fertilización en Kg/Ha			
3500 - 4000	100	80	50	40



Costo Fertilización P = 80 Kg x (Costo Fósforo/Kg)



Repetir el proceso para el Nitrógeno (N) y Potasio (K)

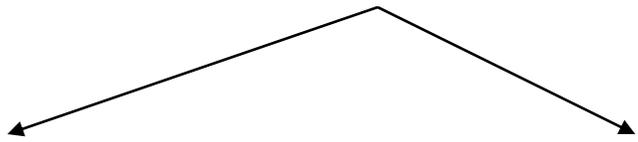


Costo Total Fertilización = Costo Fertilización N +  
Costo Fertilización P +  
Costo Fertilización K.

# Evaluación: Costo Correctivo

Cantidad de Cal Agrícola necesaria: Tn/Ha

MAX (Formula1, Formula2)



$$\text{Formula1} = \text{Al} \times 1,2$$

$$\text{Formula 2} = 3,5 - (\text{Ca} + \text{Mg})$$

Ej: Niveles de: Al = 1,76

Ca = 1,76

Mg = 1,15

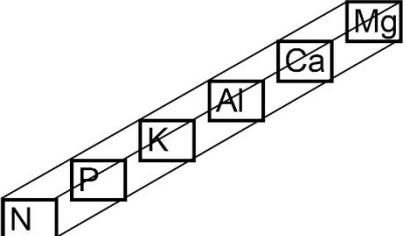
$$\text{Formula 1} = 1,76 \times 1,2 = 2,112 \text{ Tn}$$

$$\text{Formula 2} = 3,5 - (1,76 + 1,15) = 2,89 \text{ Tn}$$

$$\text{MAX}(2,112, 2,89) = 2,89 \text{ Tn}$$

# Evaluación: Costo Correctivo

Por cada posición en el Cromosoma:



The diagram shows a chromosome with six gene positions labeled N, P, K, Al, Ca, and Mg. Below the chromosome is a 7x7 matrix of numerical values.

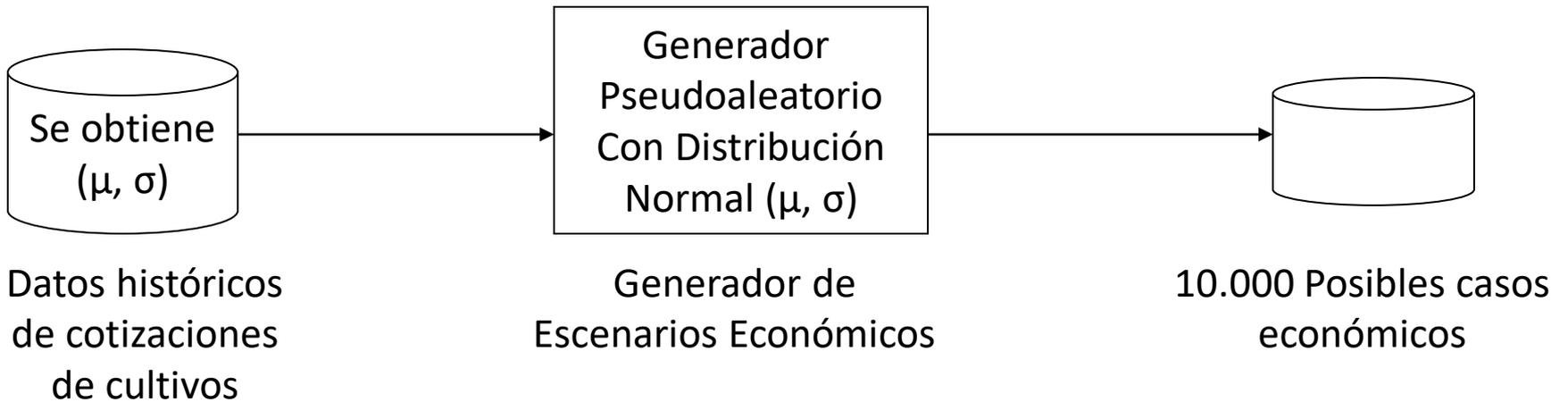
1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

Calcular Formula1;

Calcular Formula2;

CostoTotalCorrectivo += Max(Formula1, Formula2)  
x (CostoCalAgricultura/Kg);

# Evaluación: Ganancia Bruta



# Evaluación: Ganancia Bruta

Por cada posición  
del Cromosoma: hacer

Por cada posible  
escenario económico: hacer

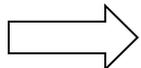
1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

Ganancia Bruta += RendimientoPromedioEsperado(ID Cultivo) x

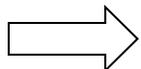
CasoEconomico(*i*)

Rendimiento Esperado en Kg/Ha	Nivel actual de Fosforo (P) en el suelo en mg/dm <sup>3</sup>			
	0 - 7	8 - 16	17 - 41	> 42
	Recomendación de Fertilizacion en Kg/Ha			
3500 - 4000	100	80	50	40

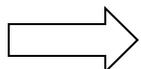
Caso	Cotizaciones				
1 - 10000	Soja	Trigo	Maiz	Girasol	Caña
0	723,5	621,7	382,4	1150,1	525,6
1	725,4	622,2	385,4	1148,2	524,2
2	719,4	621,1	375,2	1149,1	526,4
3	721,6	623,1	378,9	1151,2	527,1
4	721,9	622,5	381,1	1150,0	525,4
5	723,1	621,4	381,8	1149,9	525,9
9999	722,4	620,9	382,5	1151,0	524,9



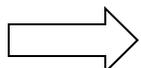
Ganancia Bruta Máxima



Ganancia Bruta Promedio

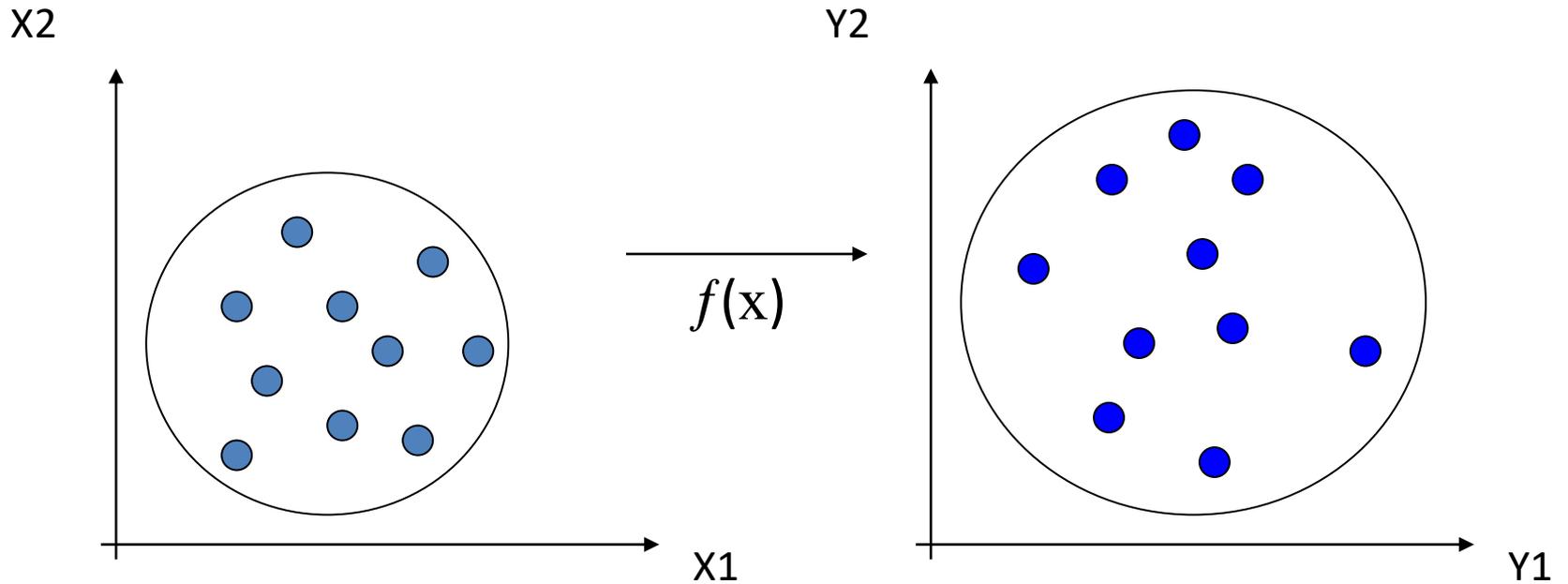


Ganancia Bruta Mínima



Riesgo

# Espacios: Decisión y Solución



1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0



Objetivos:

Max  $FX_1$  = Ganancia Bruta Mínima

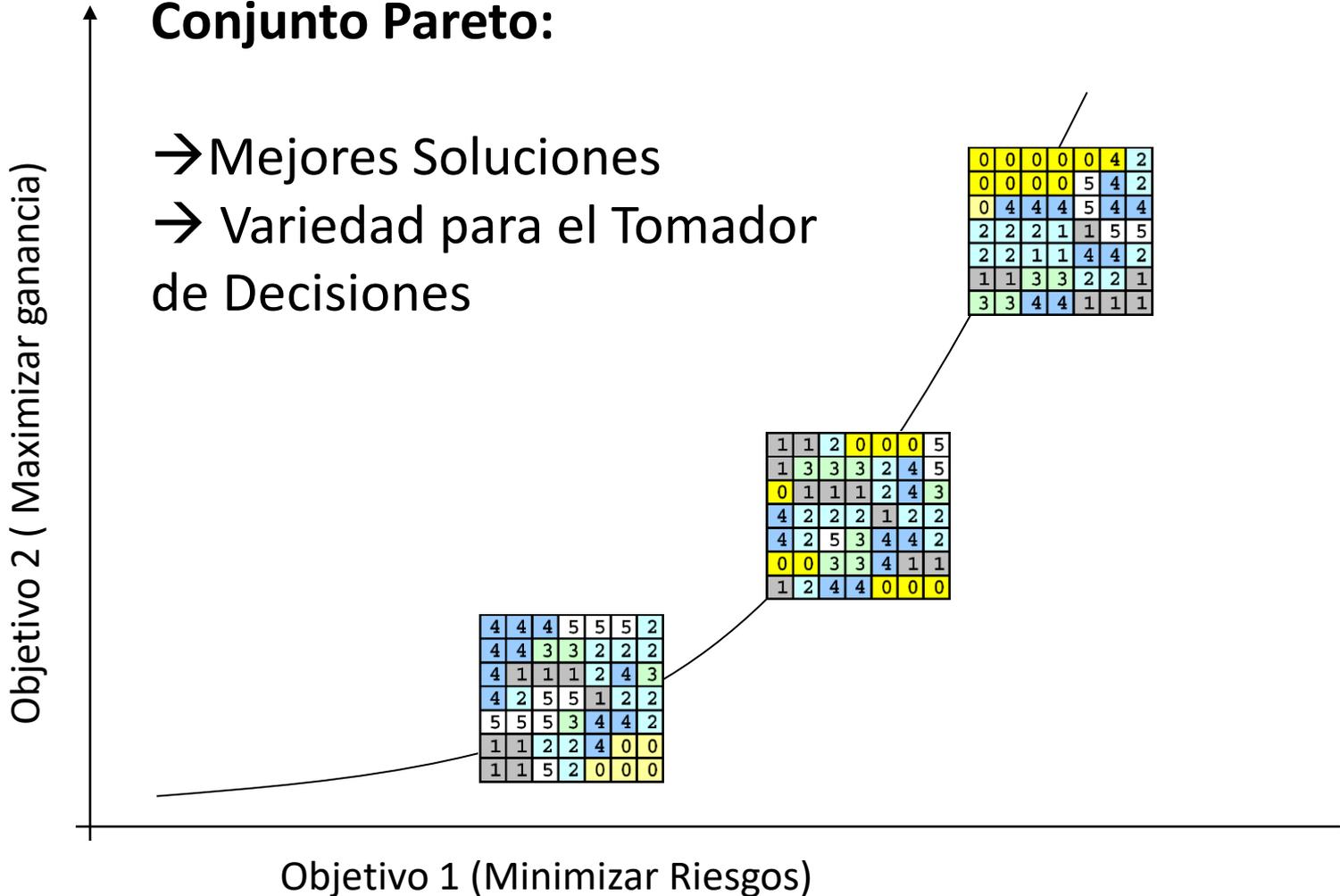
Min  $FX_2$  = Riesgo

Min  $FX_3$  = Costos Totales

# Frente Pareto

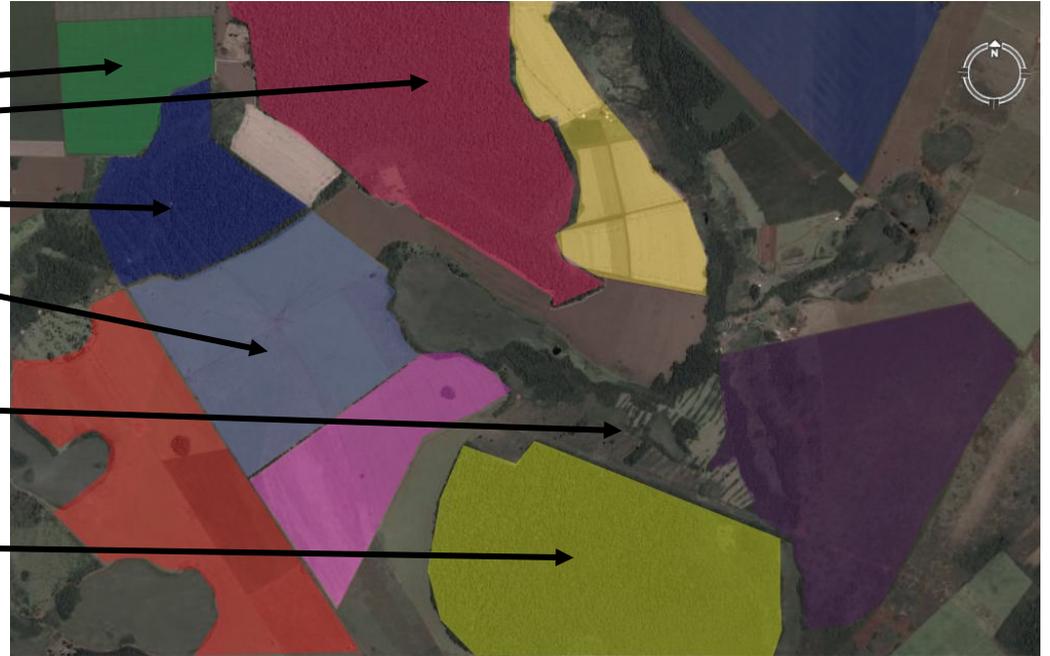
## Conjunto Pareto:

- Mejores Soluciones
- Variedad para el Tomador de Decisiones

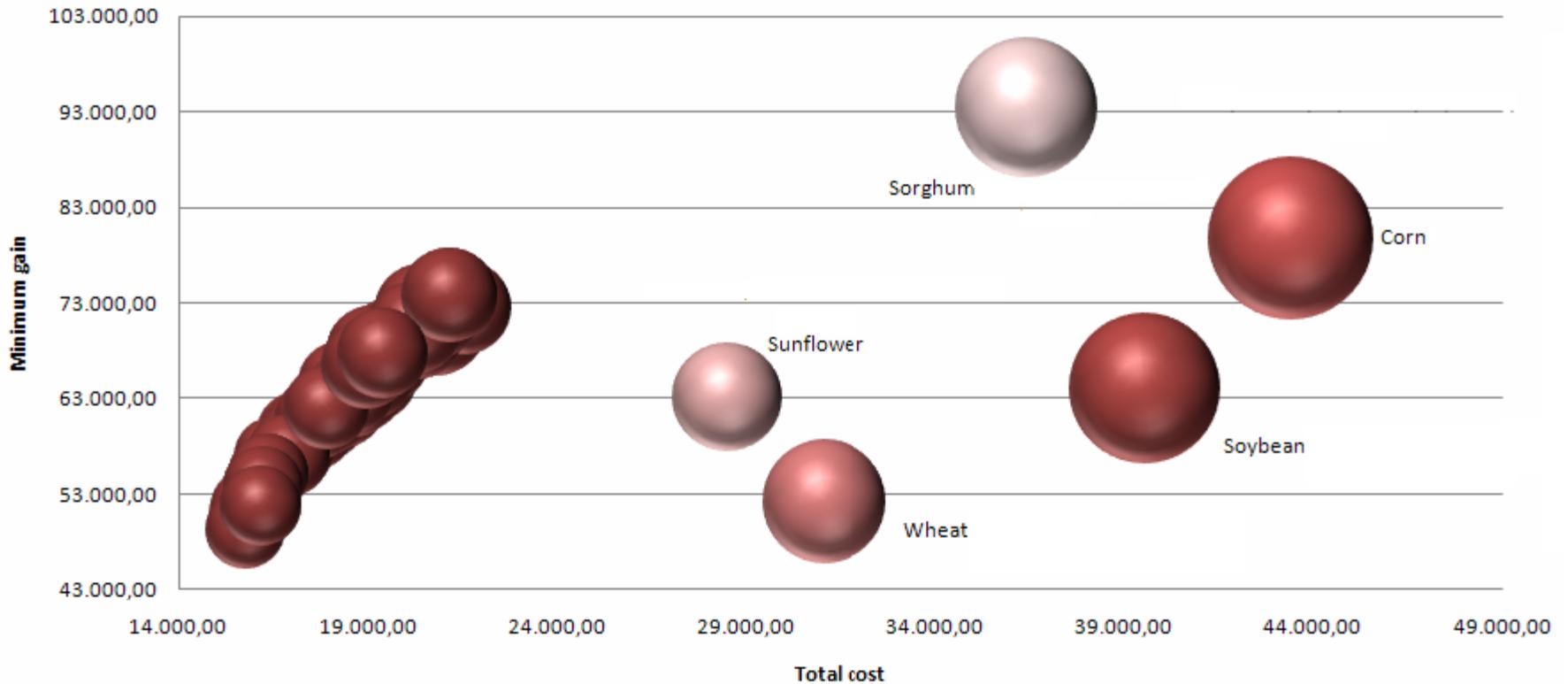


# Resultados

1	1	2	0	0	0	5
1	3	3	3	2	4	5
0	1	1	1	2	4	3
4	2	2	2	1	2	2
4	2	5	3	4	4	2
0	0	3	3	4	1	1
1	2	4	4	0	0	0

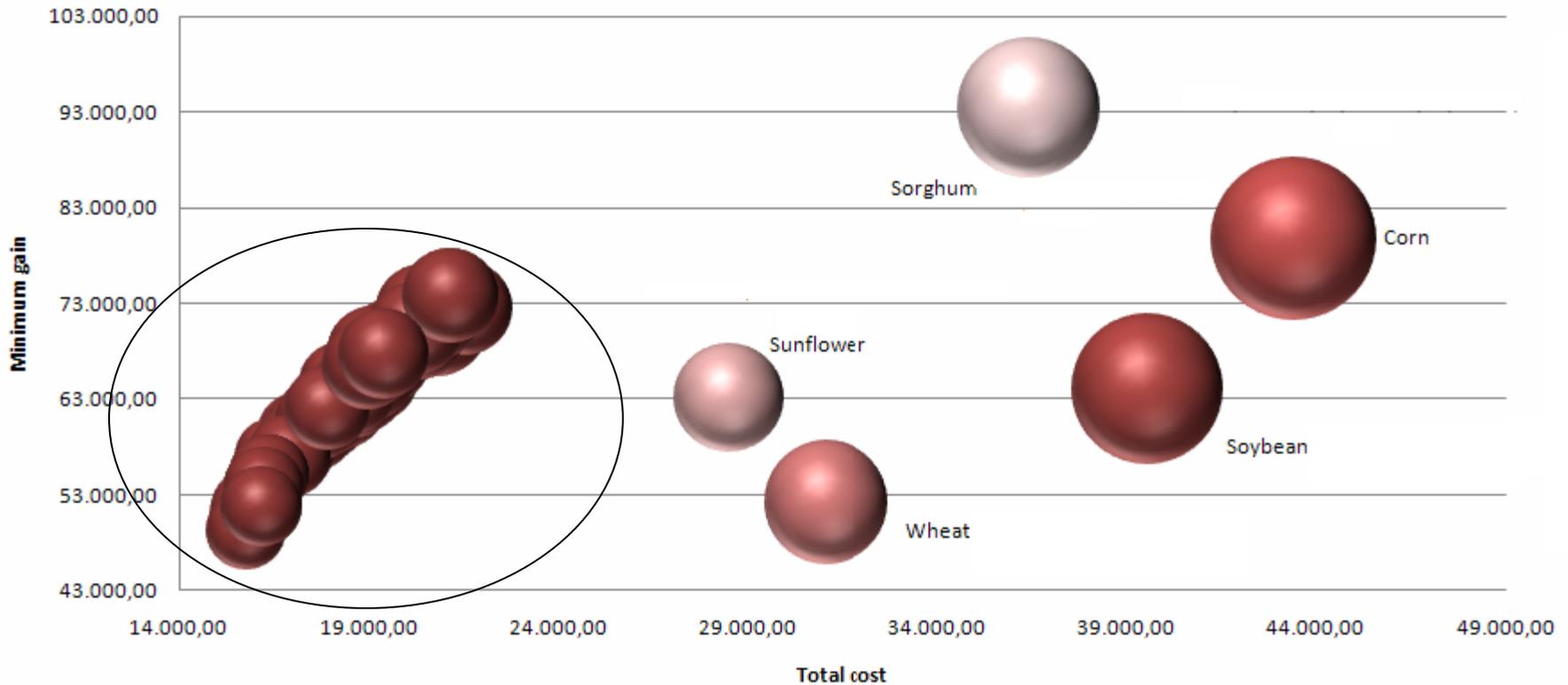


# Resultados



El tamaño de la burbuja representa la desviación estándar de los posibles escenarios

# Resultados



Soluciones propuestas: costo mínimo, ganancia mínima competitiva, pequeña desviación estándar de las ganancias

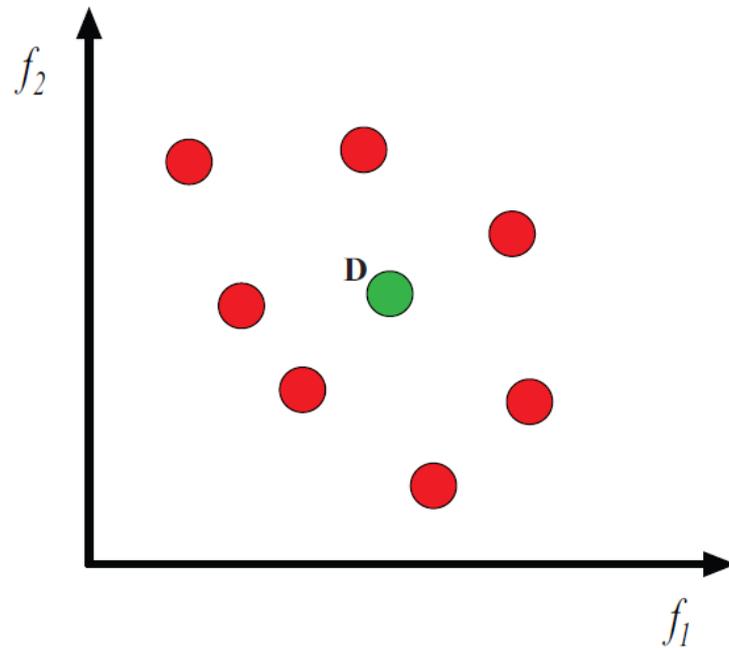
# Aumento en el número de objetivos

- Minimizar el costo de fertilización
- Minimizar el uso de pesticidas
- Minimizar el costo total de producción
- Maximizar el rendimiento promedio
- Maximizar el rendimiento en el peor de los casos
- Minimizar la desviación estándar de los posibles retornos económicos
- Considerar rotaciones de cultivos (planificación a largo plazo)

**Problemas de optimización con muchos  
objetivos  
(Many-objective optimization problems)**

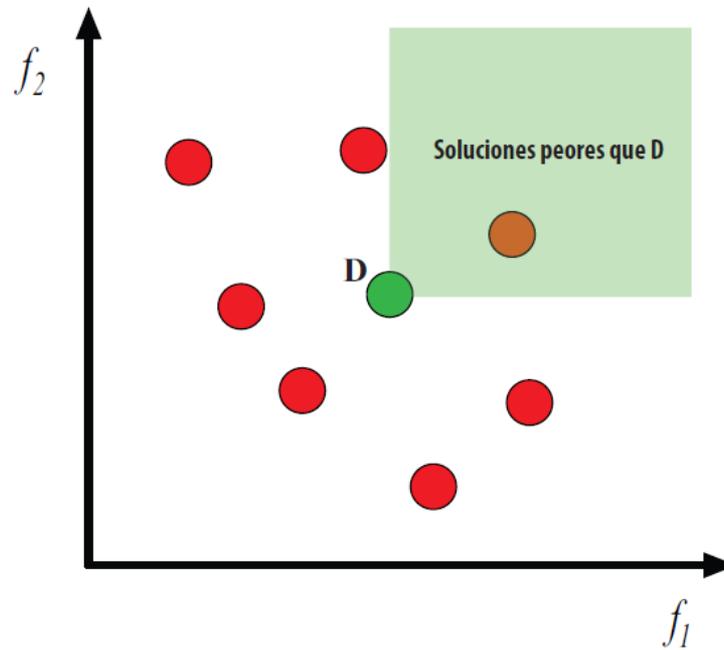
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con dos objetivos



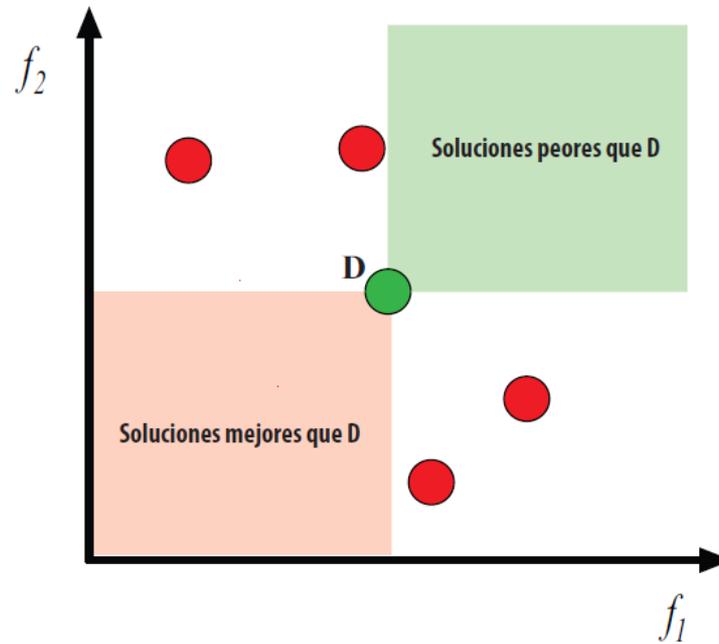
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con dos objetivos



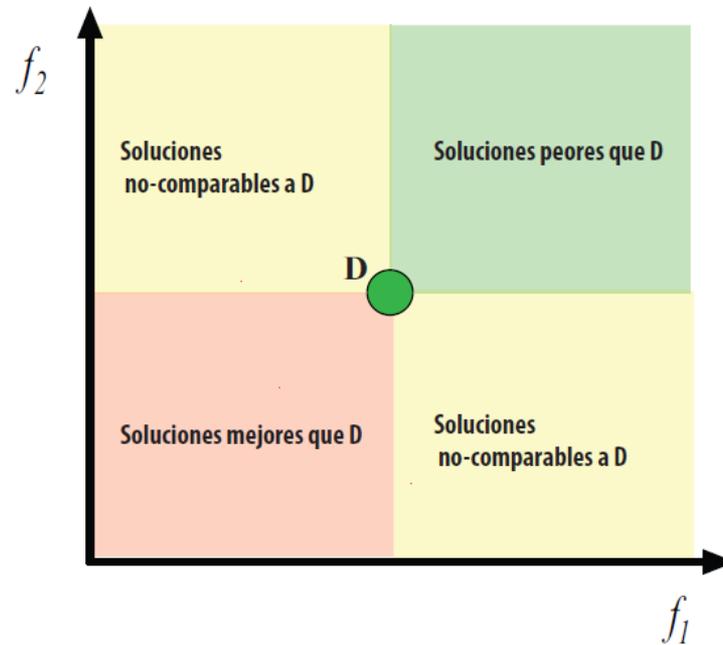
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con dos objetivos



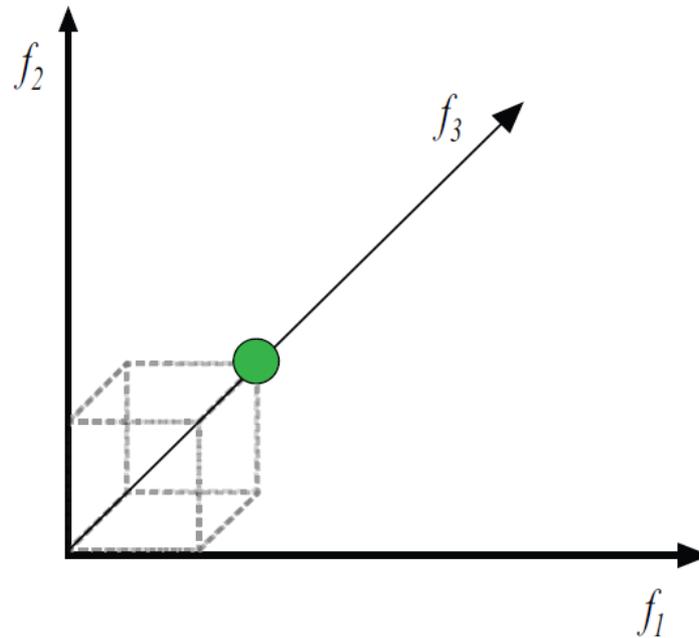
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con dos objetivos



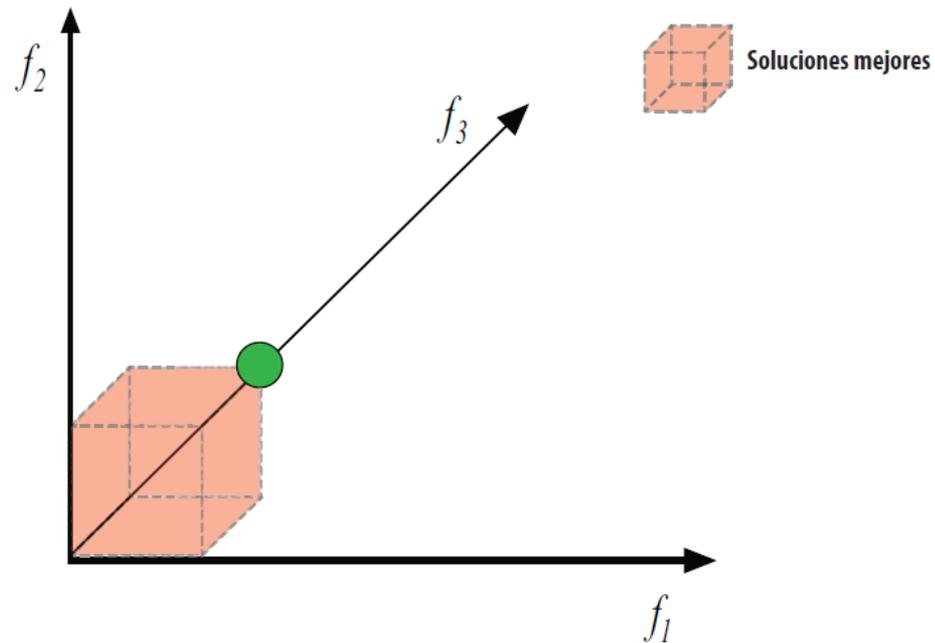
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con tres objetivos



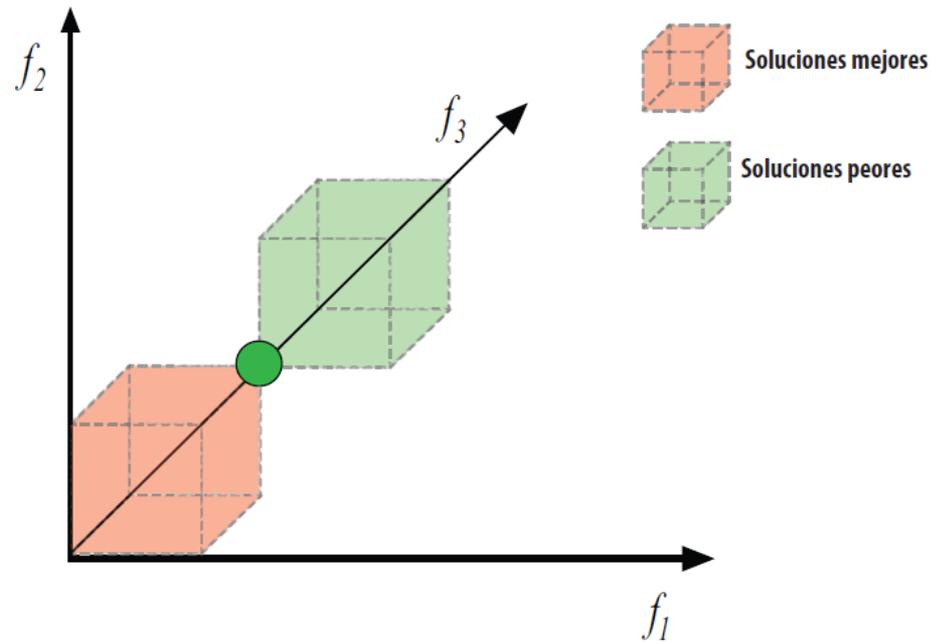
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con tres objetivos



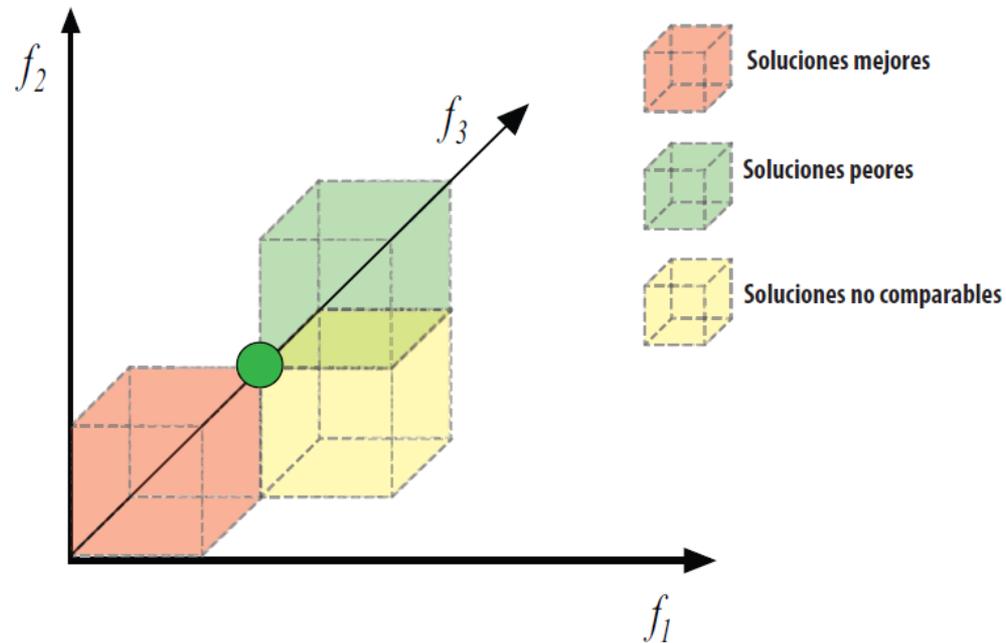
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con tres objetivos



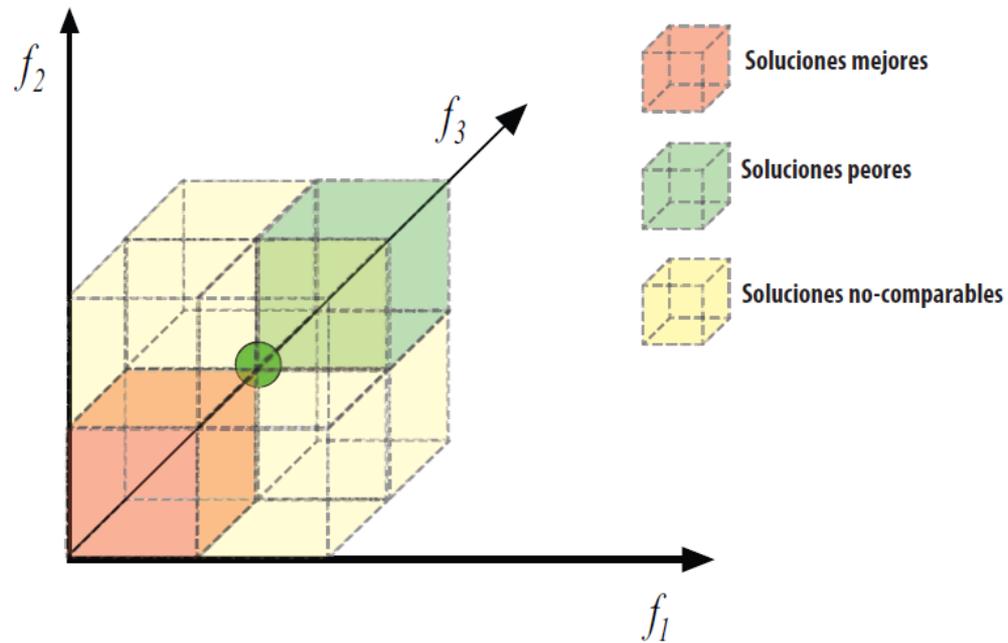
# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con tres objetivos

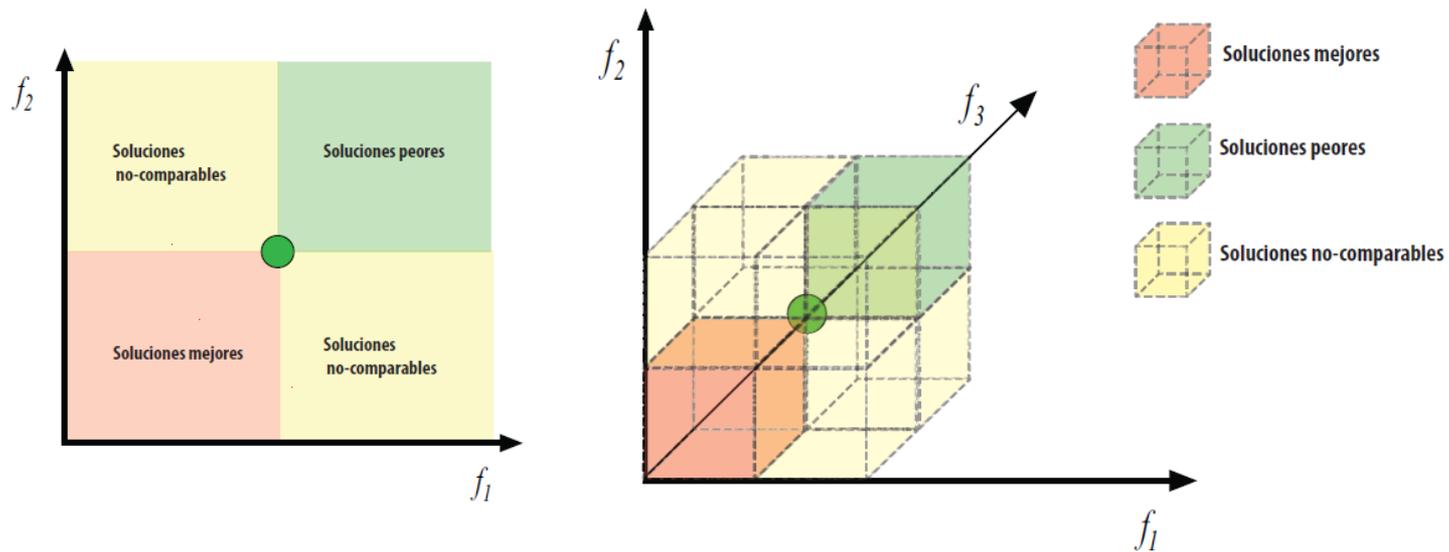


# Relación de dominancia

## Clasificación de soluciones con tres objetivos



# Proporción de soluciones no-comparables



No comparables:  $1/2$

No comparables:  $6/8$

**Proporción de soluciones no-comparables:**

$$e = \frac{2^m - 2}{2^m}$$

# Dificultad principal de los MOEAs en problemas con muchos objetivos

Aumenta el número de objetivos



Aumenta la proporción de soluciones no comparables

Dificultad de diferenciar soluciones en problemas con 4 o más objetivos (many-objective) utilizando la relación de dominancia

# Dificultad principal de los MOEAs en problemas con muchos objetivos

Pérdida de efectividad del procedimiento de asignación de *fitness* para los MOEAs basados en dominancia

MOEAs incapaces de aproximar adecuadamente el Frente Pareto en problemas con más de 4 objetivos

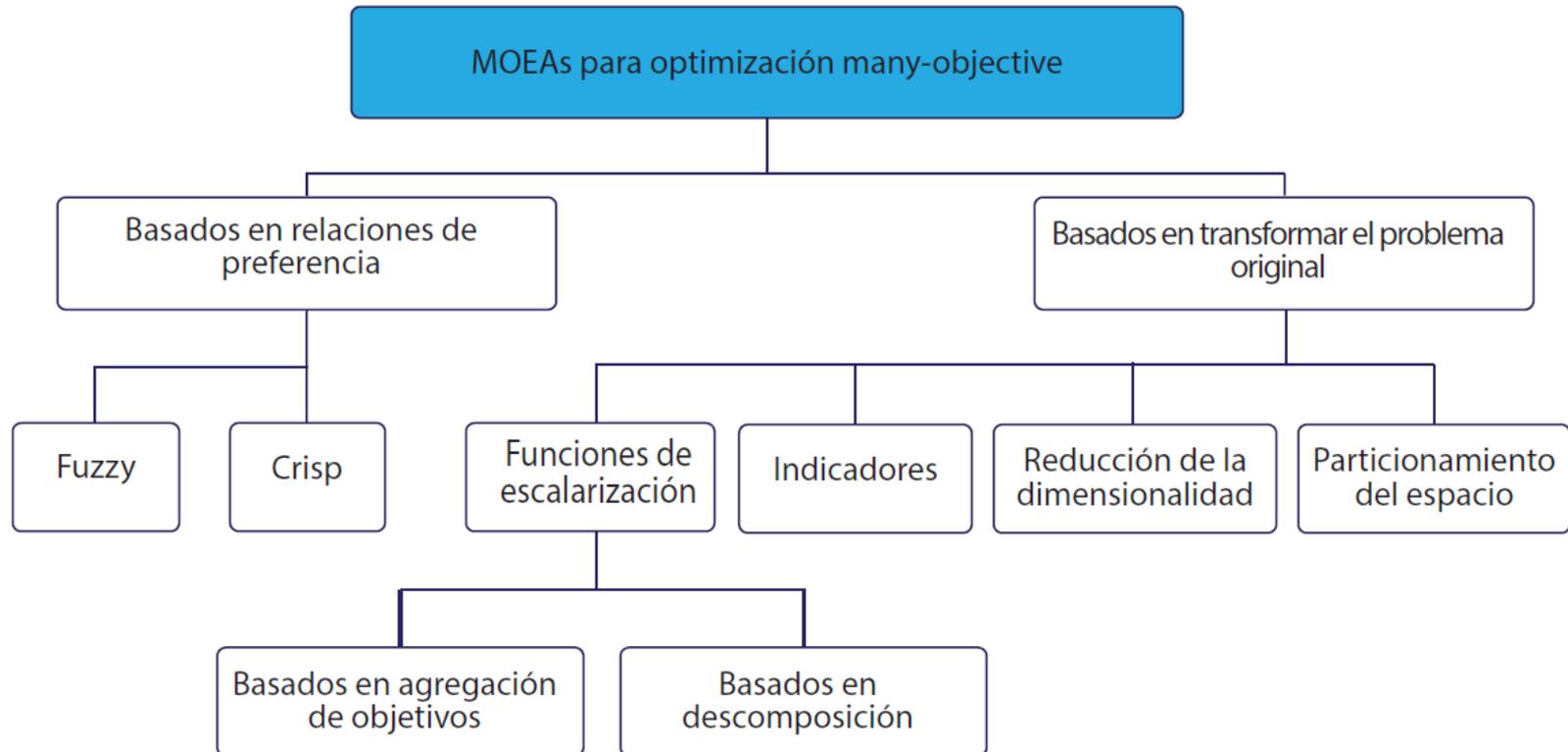
# Dificultad principal de los MOEAs en problemas con muchos objetivos

## Alternativas

- nuevas relaciones para comparar soluciones
- transformar el problema a otro con un número menor de objetivos
- nuevos algoritmos

Investigación reciente en el área

# Taxonomía de los MOEAs para optimización many-objective



Von Lüken, C., Barán, B., & Brizuela, C. (2014). A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. *Computational optimization and applications*, 58, 707-756.

# MOEAs basados en relaciones de preferencia

**Información adicional** para diferenciar soluciones no-dominadas

- **número de objetivos** en los que una solución es mejor que otra
- **relación de dominancia como base**

Se utilizan para:

- **exploración general**
- **refinar la búsqueda**

**Fáciles de implementar** en el marco de MOEAs existentes

# Métodos basados en relaciones de preferencia

Métodos basados en relaciones de preferencia:

- consideran que la proporción creciente de soluciones no-dominadas como reto principal para resolver problemas de optimización con más de cuatro objetivos,
- usan información adicional para proveer una clasificación de soluciones más fina,
- las relaciones a ser utilizadas dependen del objetivo del proceso de optimización: exploración general, refinar la búsqueda en una región.
- son relativamente fáciles de implementar en el marco de MOEAs basados en Pareto existentes,
- en general tienen un tiempo de cómputo del mismo orden que el ranking de dominancia Pareto ( $O(m|P|^2)$ )

# Métodos basados en relaciones de preferencia

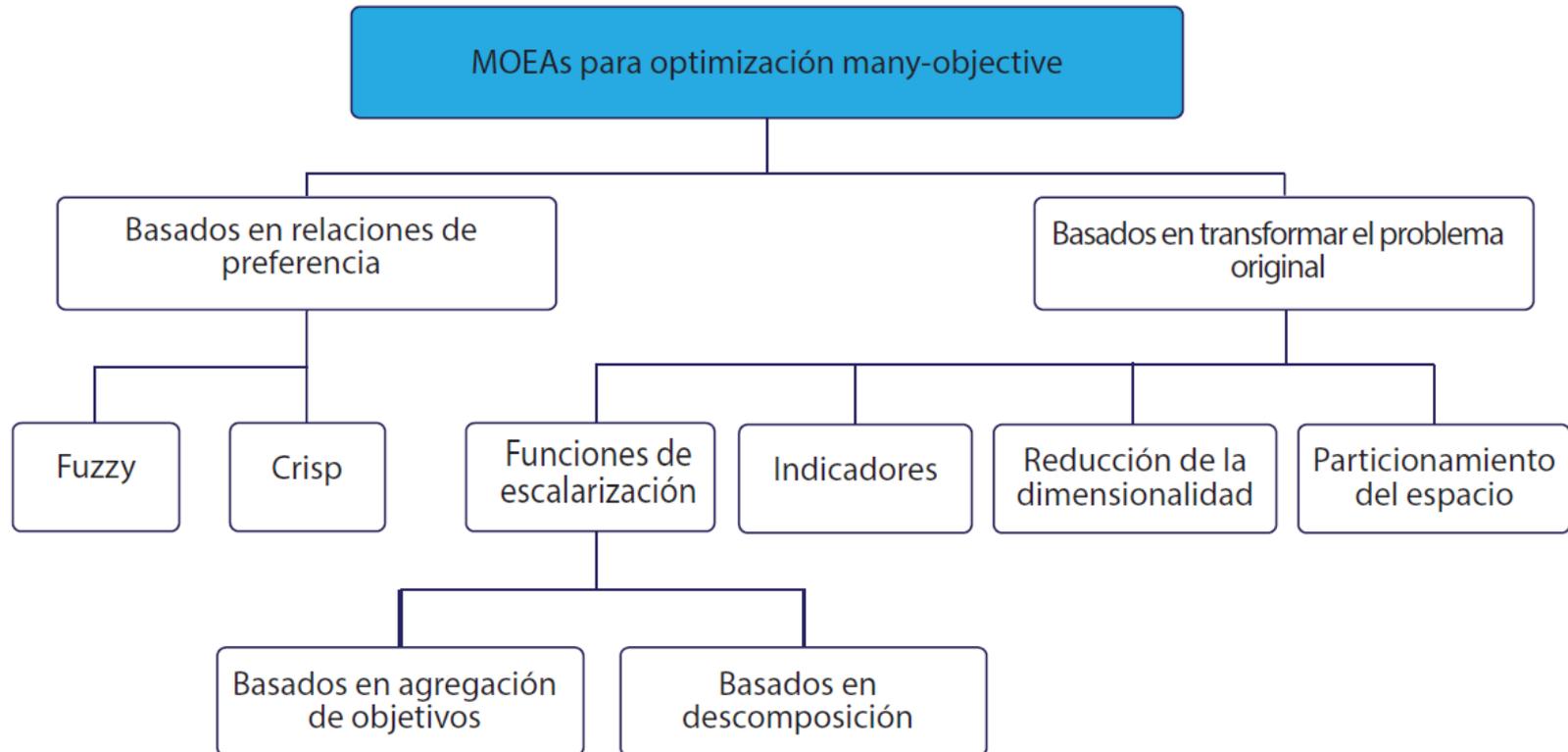
Temas de estudio:

- analizar cómo los valores de los parámetros influyen la búsqueda,
- desarrollo de técnicas que ajusten sus parámetros automáticamente conforme la evolución avanza,
- desarrollo de herramientas interactivas que permitan aplicar de mejor manera estos algoritmos a distintos problemas,
- desarrollo de metodologías para comparar algoritmos,
- analizar cómo las tendencias introducidas por las preferencias afectan el compromiso entre convergencia y diversidad en diferentes tipos de problemas
- determinar las características de los problemas para las cuales una información adicional es capaz de orientar la búsqueda hacia soluciones en el conjunto Pareto global o quedar estancadas en un óptimo local,
- analizar cómo combinar los diferentes métodos de clasificación durante el proceso evolutivo a fin de mejorar la búsqueda,
- analizar cómo mejorar el desempeño de los diferentes métodos de clasificación.

Von Lüken, C., Barán, B., & Brizuela, C. (2014). A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. *Computational optimization and applications*, 58, 707-756.

von Lüken, C., Brizuela, C., & Barán, B. (2019). An overview on evolutionary algorithms for many-objective optimization problems. *Wiley interdisciplinary reviews: data mining and knowledge discovery*, 9(1), e1267.

# Taxonomía de los MOEAs para optimización many-objective



Von Lüken, C., Barán, B., & Brizuela, C. (2014). A survey on multi-objective evolutionary algorithms for many-objective problems. *Computational optimization and applications*, 58, 707-756.

# MOEAs que transforman el problema original

Temas de investigación:

- Enfoques de agregación: cómo identificar los objetivos a combinar, y qué función de escalarización utilizar.
- Métodos de descomposición: desarrollo de métodos adaptativos para lidiar con la elección de las funciones de escalarización y la generación de los vectores que ponderan los objetivos.
- Métodos basados en indicadores: cómo mejorar el costo computacional de los métodos basados en indicadores.
- Técnicas de reducción de la dimensionalidad:
  - 1 cuál técnica de reducción de objetivos se ajusta mejor para una clase dada de problemas,
  - 2 cómo combinar eficientemente con otros métodos para solucionar problemas con muchos objetivos,
  - 3 cuándo ejecutar el método de reducción objetivo.
- Enfoques de partición del espacio de objetivos:
  - 1 cómo muestrear los subespacios,
  - 2 analizar el desempeño en combinación con relaciones de preferencia e indicadores.

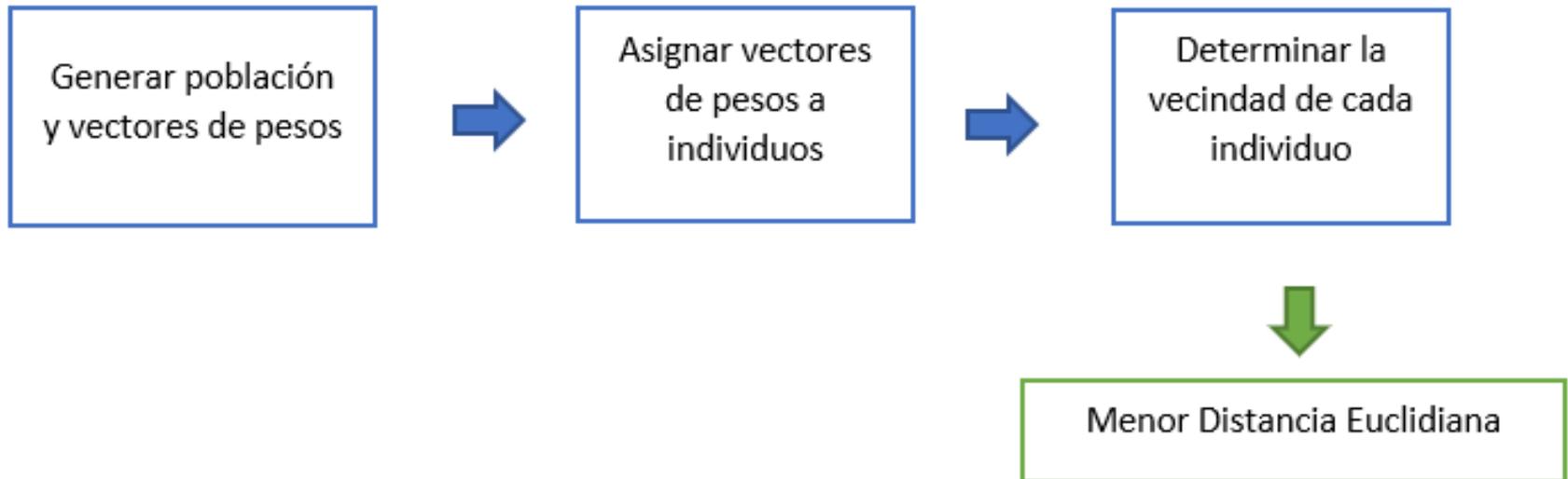
# MOEAs que transforman el problema original

Temas de investigación:

- Enfoques de agregación: cómo identificar los objetivos a combinar, y qué función de escalarización utilizar.
- Métodos de descomposición: desarrollo de métodos adaptativos para lidiar con la elección de las funciones de escalarización y la generación de los vectores que ponderan los objetivos.
- Métodos basados en indicadores: cómo mejorar el costo computacional de los métodos basados en indicadores.
- Técnicas de reducción de la dimensionalidad:
  - 1 cuál técnica de reducción de objetivos se ajusta mejor para una clase dada de problemas,
  - 2 cómo combinar eficientemente con otros métodos para solucionar problemas con muchos objetivos,
  - 3 cuándo ejecutar el método de reducción objetivo.
- Enfoques de partición del espacio de objetivos:
  - 1 cómo muestrear los subespacios,
  - 2 analizar el desempeño en combinación con relaciones de preferencia e indicadores.

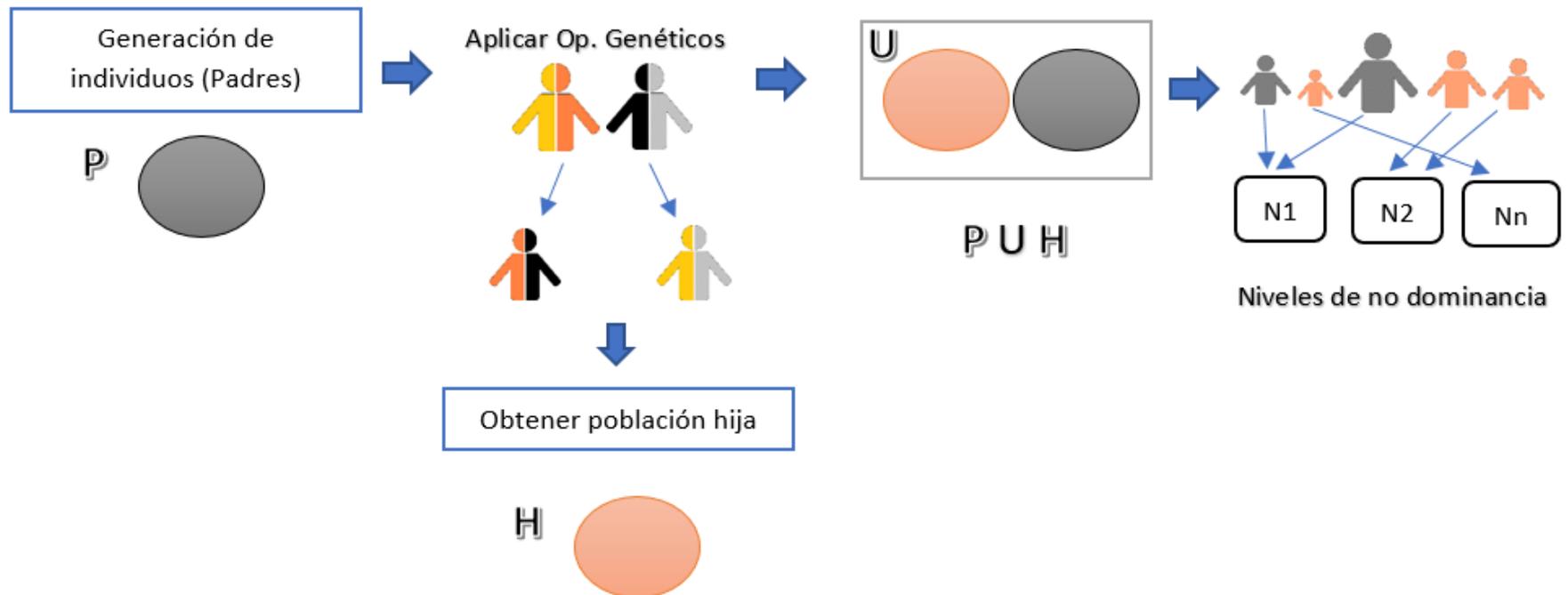
# MOEA/D

**Estrategia de descomposición.** Cada individuo con sus vecinos representan un subproblema.

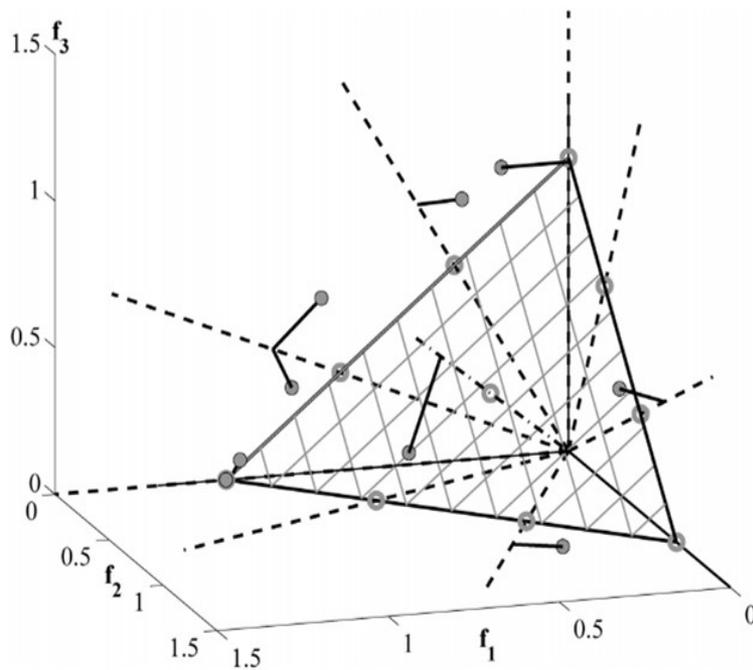


# NSGA-III

**Basado en NSGA-II.** La diferencia principal es que NSGA-III utiliza un mecanismo de selección basado en vectores de referencia que ayuda a mantener la diversidad.



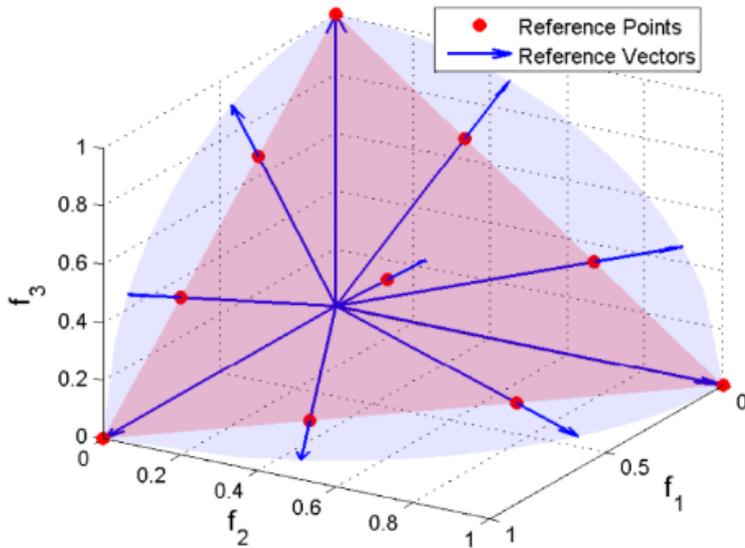
# NSGA-III



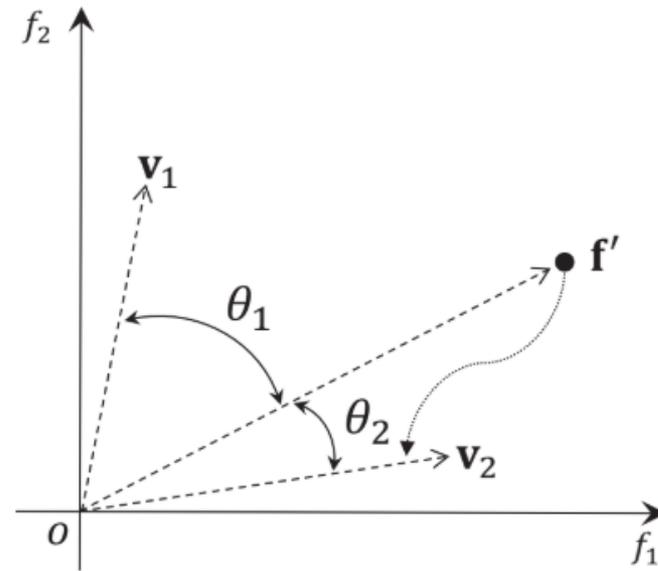
**Asociación.** Los individuos se asocian al vector de referencia más cercano según la distancia perpendicular.

**Selección.** Son seleccionados aquellos individuos que pertenezcan al último nivel de no dominancia y que estén asociados a un vector de referencia con la menor cantidad de individuos asociados.

# RVEA



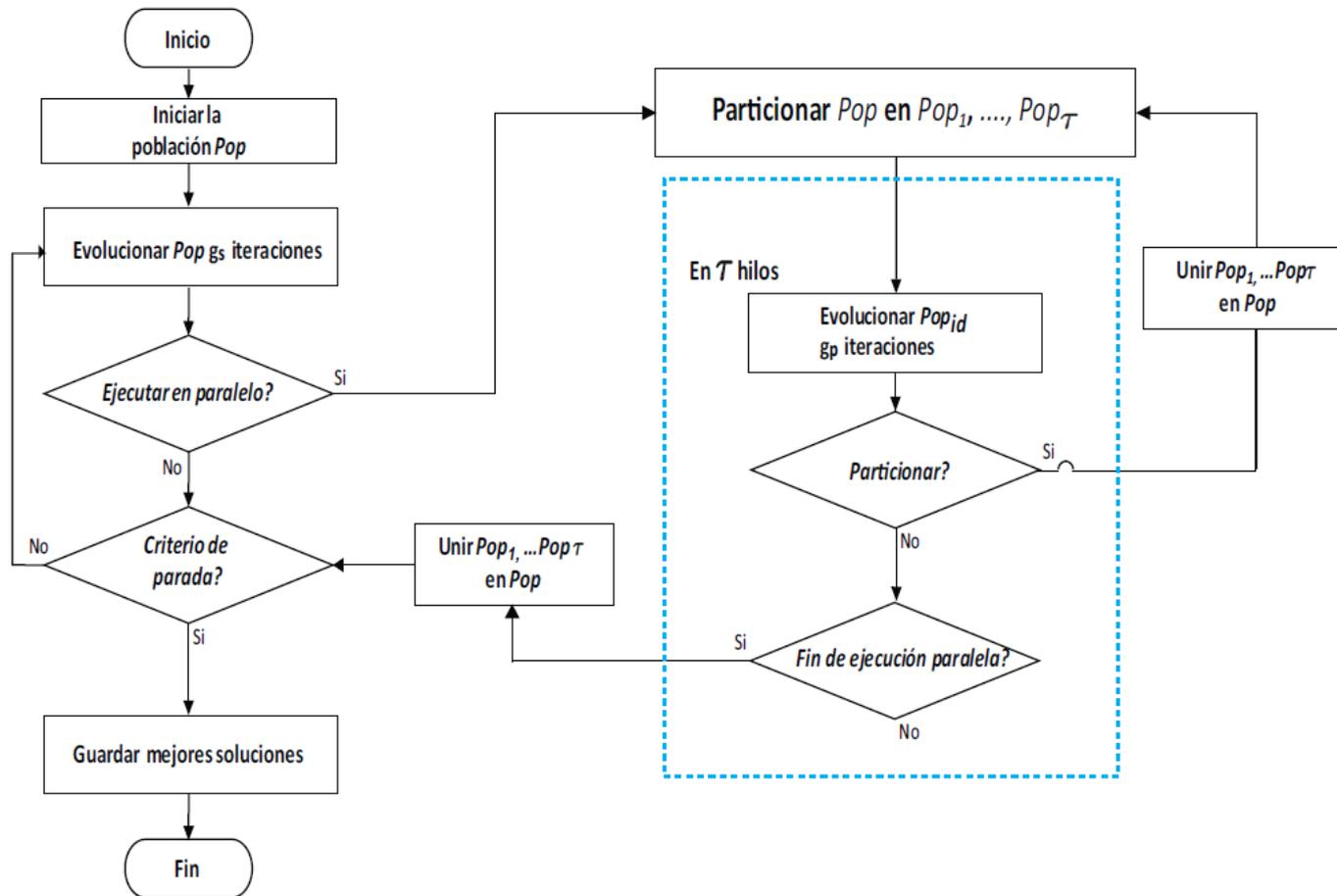
**Vectores de referencia distribuidos uniformemente en el espacio de búsqueda.** RVEA está basado en vectores de referencia para la descomposición del espacio de búsqueda.



**Asociación de individuos a vectores de referencia.** El criterio para asociarlos procede del cálculo de la menor distancia angular entre ambos.

**Selección de individuos de subespacios.** Se realiza a través del cálculo de la Distancia Penalizada por Ángulo (APD) [3]

# Propuesta de paralelización



von Lüken, C., Brizuela, C. A., & Barán, B. (2022). Clustering-based multipopulation approaches in MOEA/D for many-objective problems. *Computational Optimization and Applications*, 81(3), 789-828.

# Temas de investigación

- Combinación de la técnica propuesta con otras alternativas
- Aplicación del modelo de particionamiento a otras áreas
- Resolución de problemas de ingeniería
- Prueba con otros algoritmos y métodos.

# Temas de investigación resumen

- Mejoras de algoritmos evolutivos con enfoque de descomposición
- Mejoras de calculo de la función de adaptación
- Estudio de operadores de cruza y mutación específicos para problemas con más de tres objetivos
- Desarrollo de métodos híbridos que combinan búsqueda local con MOEAs
- Desarrollo de métodos para reducir la cantidad de objetivos en problemas de alta dimensión

# Temas de investigación resumen

- Métodos de visualización de soluciones en problemas con más de tres objetivos
- Algoritmos evolutivos que se adaptan a problemas multiobjetivo con cambios dinámicos en el entorno
- Aplicaciones de algoritmos evolutivos multiobjetivo en áreas como la ingeniería, finanzas, biología, etc.

Gracias por su atención