Que ningún término resoluble de λ_V se quede atrás

«No solvable lambda-value term left behind»

Logical Methods in Computer Science 12(2:12) 2016

Alvaro García Pérez and **Pablo Nogueira**

Facultad de Informática UCM, 5 de julio de 2016

Computar funciones sobre números naturales

$$f \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$
$$f = \{\, (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \,\}$$

Computar funciones sobre números naturales

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
f &= \{ (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \} \\
f(x) &= 2 * x
\end{aligned}
$$

Computar funciones sobre números naturales

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\
f &= \{ (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \} \\
f(x) &= 2 * x \\
& \lambda x.\, \mathsf{mult}\,(2, x) \\
& \lambda y.\, \mathsf{mult}\,(2, y) \\
& \lambda x.\, \mathsf{add}\,(x, x) \\
& \lambda x.\, \mathsf{sub}\,(\mathsf{mult}\,(3, x), x)
\end{aligned}
$$

Computar funciones sobre números naturales

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
f &= \{ (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \} \\
f(x) &= 2 * x \\
& \lambda x.\, \mathrm{mult}\,(2, x) \\
& \lambda y.\, \mathrm{mult}\,(2, y) \\
& \lambda x.\, \mathrm{add}\,(x, x) \\
& \lambda x.\, \mathrm{sub}\,(\mathrm{mult}\,(3, x), x) \\
& \lambda x.\, \mathrm{sub}\,(\mathrm{mult}\, 3\, x)\, x
\end{aligned}
$$

Computar funciones sobre números naturales

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
f &= \{\, (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \,\} \\
f(x) &= 2 * x \\
& \quad \lambda x.\, \mathrm{mult}\,(2, x) \\
& \quad \lambda y.\, \mathrm{mult}\,(2, y) \\
& \quad \lambda x.\, \mathrm{add}\,(x, x) \\
& \quad \lambda x.\, \mathrm{sub}\,(\mathrm{mult}\,(3, x), x) \\
& \quad \lambda x.\ \ s\ \ (\ \ m\ \ \ t\, x)\, x
\end{aligned}
$$

Computar funciones sobre números naturales

$$
\begin{aligned}
f &\in \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\
f &= \{ (0,0), (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), \ldots \} \\
f(x) &= 2 * x \\
& \lambda x.\, \mathrm{mult}\,(2, x) \\
& \lambda y.\, \mathrm{mult}\,(2, y) \\
& \lambda x.\, \mathrm{add}\,(x, x) \\
& \lambda x.\, \mathrm{sub}\,(\mathrm{mult}\,(3, x), x) \\
& \lambda x.\quad s \quad (\quad m \quad t\, x)\, x \\
& \lambda x.\, (s\,((m\,t)\,x))\,x
\end{aligned}
$$

Las funciones son valores, todo es una función

$$
\begin{aligned}
(\lambda x.\lambda y.\, a\, x\, y)\, M \\
\lambda y.\, a\, M\, y \\
\lambda y.\, a\, M'\, y \\
(\lambda y.\lambda x.\, a\, x\, y)\, M \\
\lambda x.\, a\, x\, M \\
\lambda x.\, a\, x\, M'
\end{aligned}
$$

Términos

$$\frac{x \in \mathsf{V}}{x \in \Lambda} \qquad \frac{M \in \Lambda \qquad N \in \Lambda}{M\,N \in \Lambda} \qquad \frac{x \in \mathsf{V} \qquad B \in \Lambda}{\lambda x.B \in \Lambda}$$

$$\begin{array}{lllll}
x & y & \dots & & \\
x\,x & x\,y & y\,y & \dots & \\
\lambda x.x & \lambda y.x & \lambda x.y & \lambda y.y & \lambda x.\lambda x.x \;\dots \\
x(\lambda x.x) & y(\lambda x.x) & (x\,x)(\lambda y.y) & (\lambda y.y)(x\,x) & \dots \\
\multicolumn{2}{l}{(\lambda x.x)(\lambda x.\lambda y.y)} & \multicolumn{3}{l}{((\lambda x.y)(x\,y))(\lambda x.x)\;\dots}
\end{array}$$

α-equivalencia de términos

$$
\begin{array}{lcl}
\lambda x.x & \equiv & \lambda y.y \\
\lambda x.y & \not\equiv & \lambda x.x \\
\lambda x.y & \not\equiv & \lambda y.x \\
\lambda x.\lambda y.x\,y & \equiv & \lambda y.\lambda x.y\,x
\end{array}
$$

Combinadores y auto-aplicación

$\mathbf{I}$	es	$\lambda x.\,x$
$\mathbf{K}$	es	$\lambda x.\,\lambda y.\,x$
$\boldsymbol{\Delta}$	es	$\lambda x.\,x\,x$
$\boldsymbol{\Omega}$	es	$\boldsymbol{\Delta}\,\boldsymbol{\Delta}$ es $(\lambda x.\,x\,x)(\lambda x.\,x\,x)$
$\mathbf{Y}$	es	$\lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))(\lambda x.f\,(x\,x))$

Combinadores y auto-aplicación

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{I} & \text{es} & \lambda x.\, x \\
\mathbf{K} & \text{es} & \lambda x.\, \lambda y.\, x \\
\mathbf{\Delta} & \text{es} & \lambda x.\, x\, x \\
\mathbf{\Omega} & \text{es} & \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \quad \text{es} \quad (\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x) \\
\mathbf{Y} & \text{es} & \lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))(\lambda x.f\,(x\,x))
\end{array}
$$

$$\mathbf{K}\,M\,N \longrightarrow (\lambda y.M)\,N \longrightarrow M$$

Combinadores y auto-aplicación

$$
\begin{array}{lll}
\mathbf{I} & \text{es} & \lambda x.\, x \\
\mathbf{K} & \text{es} & \lambda x.\, \lambda y.\, x \\
\mathbf{\Delta} & \text{es} & \lambda x.\, x\, x \\
\mathbf{\Omega} & \text{es} & \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \quad \text{es} \quad (\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x) \\
\mathbf{Y} & \text{es} & \lambda f.(\lambda x.f\,(x\,x))(\lambda x.f\,(x\,x))
\end{array}
$$

$$\mathbf{K}\, M\, N \longrightarrow (\lambda y.M)\, N \longrightarrow M$$

$$\mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbf{\Omega} \longrightarrow \ldots$$

Combinadores y auto-aplicación

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{I} & \text{es} & \lambda x.\, x \\
\mathbf{K} & \text{es} & \lambda x.\, \lambda y.\, x \\
\mathbf{\Delta} & \text{es} & \lambda x.\, x\, x \\
\mathbf{\Omega} & \text{es} & \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \quad \text{es} \quad (\lambda x.\, x\, x)(\lambda x.\, x\, x) \\
\mathbf{Y} & \text{es} & \lambda f.(\lambda x.f\,(x\, x))(\lambda x.f\,(x\, x))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\, M\, N &\longrightarrow (\lambda y.M)\, N \longrightarrow M \\
\mathbf{\Omega} &\longrightarrow \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbf{\Omega} \longrightarrow \ldots \\
\mathbf{Y}\, n &\longrightarrow (\lambda x.n\,(x\, x))(\lambda x.n\,(x\, x)) \\
&\longrightarrow n\,((\lambda x.n\,(x\, x))(\lambda x.n\,(x\, x))) \\
&\longrightarrow n\,(n\,(\lambda x.n\,(x\, x))(\lambda x.n\,(x\, x))) \\
&\longrightarrow n\,(n\,(n\,(\ldots
\end{aligned}$$

Reducción en λK

$$\frac{}{(\lambda x.B)\,N \longrightarrow [N/x](B)}\ (\beta)$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{M\,N \longrightarrow M'\,N} \qquad \frac{N \longrightarrow N'}{M\,N \longrightarrow M\,N'} \qquad \frac{B \longrightarrow B'}{\lambda x.B \longrightarrow \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \longrightarrow M} \qquad \frac{M \longrightarrow N \qquad N \longrightarrow P}{M \longrightarrow P}$$

Reducción en λK

$$\frac{}{(\lambda x.\dots x \dots (\lambda x.x) \dots x \dots)N \longrightarrow \dots N \dots (\lambda x.x) \dots N \dots}\ (\beta)$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{M\,N \longrightarrow M'\,N} \qquad \frac{N \longrightarrow N'}{M\,N \longrightarrow M\,N'} \qquad \frac{B \longrightarrow B'}{\lambda x.B \longrightarrow \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \longrightarrow M} \qquad \frac{M \longrightarrow N \qquad N \longrightarrow P}{M \longrightarrow P}$$

Reducción en λK

$$\frac{}{(\lambda x.B)\,N \longrightarrow [N/x](B)}\;(\beta)$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{M\,N \longrightarrow M'\,N} \qquad \frac{N \longrightarrow N'}{M\,N \longrightarrow M\,N'} \qquad \frac{B \longrightarrow B'}{\lambda x.B \longrightarrow \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \longrightarrow M} \qquad \frac{M \longrightarrow N \qquad N \longrightarrow P}{M \longrightarrow P}$$

M es forma normal	:	no tiene subtérmino $(\lambda x.B)N$
M tiene forma normal	:	$M \longrightarrow Z$ y Z es forma normal
Z es único	:	teoría lógica consistente

Conversión en λK

$$\frac{}{(\lambda x.B)\,N \;=\; [N/x](B)}\;(\beta)$$

$$\frac{M \;=\; M'}{M\,N \;=\; M'\,N} \qquad \frac{N \;=\; N'}{M\,N \;=\; M\,N'} \qquad \frac{B \;=\; B'}{\lambda x.B \;=\; \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \;=\; M} \qquad \frac{M \;=\; N \qquad N \;=\; P}{M \;=\; P} \qquad \frac{M \;=\; N}{N \;=\; M}$$

M es forma normal	:	no tiene subtérmino $(\lambda x.B)N$
M tiene forma normal	:	$M = Z$ y Z es forma normal
Z es único	:	teoría lógica consistente

¿Son todos los términos sin forma normal iguales?

$$\mathbf{\Omega} = \lambda x.x\,\mathbf{\Omega}$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{I}) = (\lambda x.x\,\mathbf{\Omega})(\mathbf{K}\,\mathbf{I})$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\lambda y.\mathbf{I}) = \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\lambda y.\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

¿Son todos los términos sin forma normal iguales?

$$\mathbf{\Omega} = \lambda x.x\,\mathbf{\Omega}$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\mathbf{K}\,\mathbf{I}) = (\lambda x.x\,\mathbf{\Omega})(\mathbf{K}\,\mathbf{I})$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\lambda y.\mathbf{I}) = \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega}$$

sii

$$\mathbf{\Omega}\,(\lambda y.\mathbf{I}) = \mathbf{I}$$

Añadimos axiomas $M = N$ donde M y N no tienen forma normal: ¡inconsistencia!

Resolubilidad («solvability»)

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

Un término cerrado M es resoluble sii existen operandos $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n$ tiene forma normal.

Ecuacionalmente

$M\, N_1 \cdots N_n = Z$ (usaré Z para forma normal)

Resolubilidad («solvability»)

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

Un término cerrado M es resoluble sii existen operandos $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n$ tiene forma normal.

Ecuacionalmente

$M\, N_1 \cdots N_n = Z$ (usaré Z para forma normal)

formal normales $\subset$ resolubles

Ω es irresoluble

$\lambda x.x\,\Omega$ es resoluble

Añadimos $M = N$ donde M y N irresolubles: ¡consistencia!

Exégesis sobre resolubilidad

Definiciones equivalentes

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q.
$M\,N_1 \cdots N_n = Z$.

Exégesis sobre resolubilidad

Definiciones equivalentes

Definición (Barendregt '72 & '84)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = \mathbf{I}$.

Exégesis sobre resolubilidad

Definiciones equivalentes

Definición (Barendregt '72 & '84)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = \mathbf{I}$.

Definición (Barendregt '84)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = X$ para cualquier término X.

Exégesis sobre resolubilidad

Definiciones equivalentes

Definición (Barendregt '72 & '84)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\,N_1 \cdots N_n = \mathbf{I}$.

Definición (Barendregt '84)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\,N_1 \cdots N_n = X$ para cualquier término X.

Lema (Wadsworth '78, Barendregt '84)

Si T tiene forma normal entonces existen $X_1, \ldots, X_k$ t.q. $T\,X_1 \cdots X_k = X$ para cualquier término X.

(Pieza adicional: $\mathbf{I}\,X = X$ para todo X.)

(«Forma» de forma normal: $\lambda x_1 \ldots \lambda x_n.\, x\, Z_1 \cdots Z_n$.)

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\,N_1 \cdots N_n = Z$.

Exégesis sobre resolubilidad

Términos abiertos y cerrados

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

$$x \ \boldsymbol{\Omega}$$

Exégesis sobre resolubilidad

Términos abiertos y cerrados

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

$$\mathbf{K I \Omega}$$

Exégesis sobre resolubilidad

Términos abiertos y cerrados

Definición (Barendregt '71, Wadsworth '78)

M cerrado resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

$$x \;\; \mathbf{\Omega}$$

Definición (Wadsworth '78)

M arbitrario resoluble sii existe contexto $\mathcal{H}[\;]$ que cierra M y lo pone en posición de función aplicado a $n \geq 0$ operandos cerrados t.q. $\mathcal{H}[M] = Z$.

$$\mathcal{H}[\;] \equiv (\lambda x.[\;])(\mathbf{KI})$$

Lema de Genericidad (Barendregt '71, '72, '84)

M irresoluble sii $\forall \mathcal{C}[\ ].\, \mathcal{C}[M] = Z \Rightarrow \forall X.\, \mathcal{C}[X] = Z$

Exégesis sobre resolubilidad

Términos abiertos y uso efectivo

Lema de Genericidad (Barendregt '71, '72, '84)

M irresoluble sii $\forall \mathcal{C}[\,].\, \mathcal{C}[M] = Z \Rightarrow \forall X.\, \mathcal{C}[X] = Z$

Definición (García-Pérez & Nogueira)

M resoluble sii $\exists \mathcal{C}[\,].\, \mathcal{C}[M] = Z \wedge \neg(\forall X.\, \mathcal{C}[X] = Z)$

$\mathcal{C}$ arbitrario eventualmente usa M como función.
Sólo es necesario cerrar variables libres que impiden convertir a forma normal.

Conversión en λ_V

Plotkin '75

$$\frac{N \not\equiv (M' N')}{(\lambda x.B)\, N \;=\; [N/x](B)}\;(\beta_V)$$

$$\frac{M \;=\; M'}{M\, N \;=\; M'\, N} \qquad \frac{N \;=\; N'}{M\, N \;=\; M\, N'} \qquad \frac{B \;=\; B'}{\lambda x.B \;=\; \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \;=\; M} \qquad \frac{M \;=\; N \qquad N \;=\; P}{M \;=\; P} \qquad \frac{M \;=\; N}{N \;=\; M}$$

Conversión en λ_V

Plotkin '75

$$\frac{N \in \mathsf{Val} ::= \ \mathsf{V} \mid \lambda \mathsf{V}.B}{(\lambda x.B)\, N \ = \ [N/x](B)}\ (\beta_V)$$

$$\frac{M \ = \ M'}{M\, N \ = \ M'\, N} \qquad \frac{N \ = \ N'}{M\, N \ = \ M\, N'} \qquad \frac{B \ = \ B'}{\lambda x.B \ = \ \lambda x.B'}$$

$$\frac{}{M \ = \ M} \qquad \frac{M \ = \ N \qquad N \ = \ P}{M \ = \ P} \qquad \frac{M \ = \ N}{N \ = \ M}$$

Forma normal no tiene $(\lambda x.B)N$ con $N \in \mathsf{Val}$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})(\mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta})$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})\mathbf{\Omega}$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})\mathbf{\Omega} \longrightarrow \ldots$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$\cancel{(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})\mathbf{\Omega} \longrightarrow \ldots$$

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$\cancel{(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})})\mathbf{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta}))\mathbf{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})\mathbf{\Omega} \longrightarrow \ldots$$

$(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\mathbf{\Delta})$ es una forma normal

¿Por qué valores?

Para mantener la consistencia manteniendo la divergencia potencial

$$\cancel{(\lambda x.\underline{(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\boldsymbol{\Delta})})\boldsymbol{\Delta} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{I})\boldsymbol{\Delta} \longrightarrow \mathbf{I}}$$

$$\underline{(\lambda x.(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\boldsymbol{\Delta}))\boldsymbol{\Delta}} \longrightarrow (\lambda y.\mathbf{I})\boldsymbol{\Omega} \longrightarrow \dots$$

$(\lambda y.\mathbf{I})(x\,\boldsymbol{\Delta})$ es una forma normal

$$(x\,M)\,(y\,N)$$
$$(\lambda z.z\,(y\,N))\,(x\,M)$$
$$(\lambda z.(x\,M)\,z)\,(y\,N)$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado **resoluble** sii existen **valores** $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\,V_1$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M $\underline{\text{cerrado}}$ resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\,V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\,V_1 \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(V_1\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\,V_1 \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(V_1\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Delta\Delta}$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\, V_1 \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(V_1\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega}$$

v-resolubilidad

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M cerrado resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

¡Algunas formal normales son irresolubles!

¡Inconsistencia al igualar todos los irresolubles!

Ejemplo:

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\,V_1 \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(V_1\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \longrightarrow \ \mathbf{\Omega}$$

Misma def. hasta 2016 y por otros autores.

(Paso-por-valor como en la máquina SECD.)

¿Por qué?

~~Definición~~

M cerrado resoluble sii existen $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q.
$M\,V_1 \cdots V_n = X$ para cualquier término X.

~~Lema~~

Si T tiene forma normal entonces existen $X_1, \ldots, X_k$ t.q.
$T\,X_1 \cdots X_k = X$ para cualquier término X.

$\mathbf{I}\,X = X$ sii $X \in \mathsf{Val}$.

Volver al empezar

Definición (García-Pérez & Nogueira 2016)

M resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

Volver al empezar

Definición (García-Pérez & Nogueira 2016)

M resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q. $M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

Volver al empezar

Definición (García-Pérez & Nogueira 2016)

M resoluble sii existen $N_1, \ldots, N_n$ con $n \geq 0$ t.q.
$M\, N_1 \cdots N_n = Z$.

Definición (Paolini & Ronchi della Rocca '99)

M resoluble sii existen valores $V_1, \ldots, V_n$ con $n \geq 0$ t.q.
$M\, V_1 \cdots V_n = \mathbf{I}$.

Intuiciones fundamentales

- Transformable: convertible a un valor cualquiera.
- Congelable: convertible a forma normal, pero no cualquiera.

Resoluble = transformable + congelable

Transformable vs congelable

$\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$

Transformable vs congelable

$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I}$

Transformable vs congelable

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} \longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$$

Transformable vs congelable

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta}
\end{aligned}
$$

Transformable vs congelable

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega}
\end{aligned}
$$

Transformable vs congelable

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega}
\end{aligned}
$$

$\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}$

Transformable vs congelable

$$\begin{aligned}(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\ &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta} \\ &\longrightarrow \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega}\end{aligned}$$

$$(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})(\lambda x.z\,\mathbf{I})$$

Transformable vs congelable

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega} \\
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})(\lambda x.z\,\mathbf{I}) &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})((\lambda x.z\,\mathbf{I})\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}
\end{aligned}
$$

Transformable vs congelable

$$
\begin{aligned}
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})\mathbf{I} &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(\mathbf{I}\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow \mathbf{\Delta}\,\mathbf{\Delta} \longrightarrow \mathbf{\Omega} \\
(\lambda y.(\lambda x.\mathbf{\Delta})(y\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta})(\lambda x.z\,\mathbf{I}) &\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})((\lambda x.z\,\mathbf{I})\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta} \\
&\longrightarrow (\lambda x.\mathbf{\Delta})(z\,\mathbf{I})\mathbf{\Delta}
\end{aligned}
$$

Resumen contribuciones

- Todas las formas normales son resolubles.
- Noción de orden apropiada.
- ¡Consistencia!
- Contextos abiertos que no cierran todo.
- Resolubilidad y uso efectivo.
- Lema de Genericidad Parcial.
- Value-normal-order, chest-reduction, ribcage-reduction.
- ¡Hay estrategias completas que no son «estándar»!
- Caracterización operacional de la resolubilidad (?)
- Modelos secuenciales (?)

FIN

(No contestaré preguntas, gracias)